

Modely s režimami určenými nepozorovatelnými veličinami

Pri tejto triede je režim určený pozorovateľným (MSW model) alebo nepozorovateľným (HMM model) diskretným Markovovským stochastickým procesom q_t .

2-režimový proces s $AR(p_1)$ a $AR(p_2)$ v jednotlivých režimoch:

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \cdots + \varphi_{1,p_1}X_{t-p_1} + \varepsilon_t & \text{ak } q_t = 1 \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \cdots + \varphi_{2,p_2}X_{t-p_2} + \varepsilon_t & \text{ak } q_t = 2 \end{cases}$$

kde q_t je diskretný Markovovský stochastický proces (Markovov reťazec), ε_t je proces typu i.i.d s nulovou strednou hodnotou.

$$X_t = \varphi_{q_t,0} + \varphi_{q_t,1}X_{t-1} + \cdots + \varphi_{q_t,p}X_{t-p} + \varepsilon_t$$

kde $p = \max(p_1, p_2)$.

Diskrétne Markovovské procesy

Predpoklady:

- ✓ systém môže v každom čase t nadobúdať niektorý z m stavov $S_1, \dots, S_m$
- ✓ systém môže prechádzať z jedného stavu do druhého (pripúšťame aj návrat do toho istého stavu) s určitou pravdepodobnosťou
- ✓ táto pravdepodobnosť nezávisí od času t .

Nech q_t je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty z množiny $\{1, 2, \dots, m\}$. *Markovovým procesom 1 rádu* nazývame postupnosť náhodných premenných $q_1, q_2, \dots, q_n$ s *Markovovou vlastnosťou*, čo znamená, že pravdepodobnosť, s akou nadobudne stav q_t hodnotu j závisí len na hodnote predchádzajúceho stavu :

$$\Pr(q_t = j | q_{t-1} = i, q_{t-2} = k, \dots) = \Pr(q_t = j | q_{t-1} = i) = p_{i,j}$$

m-stavový Markovov proces 1. rádu s prechodovými pravdepodobnosťami $p_{i,j}$,
 $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Prechodová pravdepodobnosť $p_{i,j}$ predstavuje pravdepodobnosť, s akou bude stav i nasledovaný stavom j . Platí:

$$p_{i,j} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^m p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

Matica prechodových pravdepodobností:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \cdots & p_{m,m} \end{bmatrix}$$

Markovov proces nazývame *ergodický*, ak je možné dostať sa z každého stavu do ľubovoľného stavu (nie nevyhnutne v jednom kroku), tzn. pre $\forall j: p_{i,j} > 0, i, j = 1, \dots, m$.

Počiatočné stavové pravdepodobnosti:

$$\pi_i = \Pr(q_1 = i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Pozorovateľný Markovov reťazec 1. rádu

- ✓ Stavy sú pozorovateľné - korešpondujú fyzikálnym (pozorovateľným) udalostiam.
- ✓ Modelujeme pozorovateľný stochastický proces.

- m – počet stavov, $S = \{S_1, \dots, S_m\} = \{1, 2, \dots, m\}$, s daným q_t v čase t
 - ✦ $Q = \{q_1; q_2; \dots; q_n\}$ – množina stavov

- P – matica prechodových pravdepodobností stavov
 - ✦ $p_{i,j} = \Pr(q_t = j | q_{t-1} = i)$
- π – počiatočné rozdelenie stavov, $\pi_i = \Pr(q_1 = i)$, $i = 1, \dots, m$

Markovov reťazec je plne charakterizovaný dvojicou $\lambda = (P, \pi)$.

HMM (Hidden Markov model)

- ✓ Stavy sú „skryté“ (hidden) – nie sú pozorovateľné.
- ✓ Pozorovanie je pravdepodobnostnou funkciou prislúchajúcou danému stavu.
- ✓ Modelujeme „skrytý“ stochastický proces pomocou pozorovateľného procesu $\Rightarrow$ výsledok je dvojité do seba vnorený stochastický proces s dôrazom na stochastický proces, ktorý nie je pozorovateľný.

- m – počet stavov, $S = \{S_1, \dots, S_m\} = \{1, 2, \dots, m\}$, s daným q_t v čase t
 - ✦ $Q = \{q_1; q_2; \dots; q_n\}$ – množina stavov
- N – počet pozorovaní v_1 až v_N , s daným symbolom o_t v čase t
 - ✦ $O = \{o_1; o_2; \dots; o_n\}$ – množina symbolov

- P – matica prechodových pravdepodobností stavov
 - ✦ $p_{i,j} = \Pr(q_t = j | q_{t-1} = i)$
- B – rozdelenie pravdepodobností symbolov
 - ✦ $b_j(k) = \Pr(o_t = k | q_t = j) \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq j \leq m$
- π – počiatočné rozdelenie stavov, $\pi_i = \Pr(q_1 = i), i = 1, \dots, m$

Na základe (pozorovateľnej) množiny symbolov modelujeme množinu stavov (skrytý proces). Dostávame HMM (Hidden Markov Model), ktorý je plne charakterizovaný trojicou $\lambda = (P, B, \pi)$.

Príklad 1 (Markovov pozorovateľný reťazec):

Označme:

Počasie 20 minulých dní:

S, S, D, S, S, S, S, D, S, S, S, D, C, D, S, S, S, D, S, S

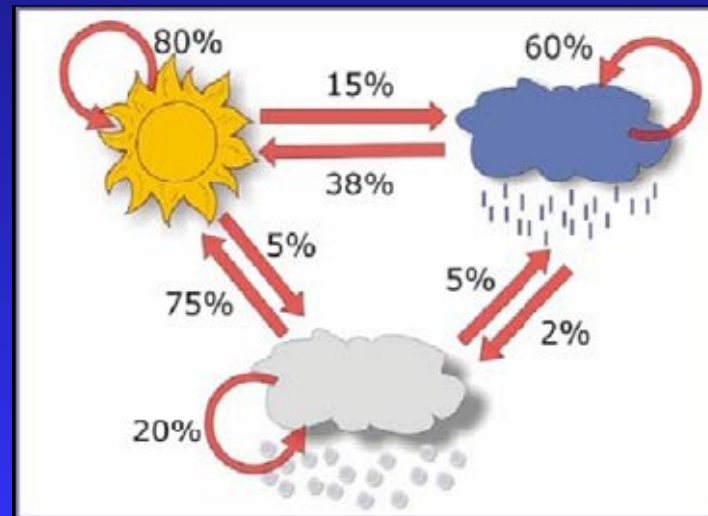


Počiatkové rozdelenie stavov: $\pi = (0.70, 0.25, 0.05)$

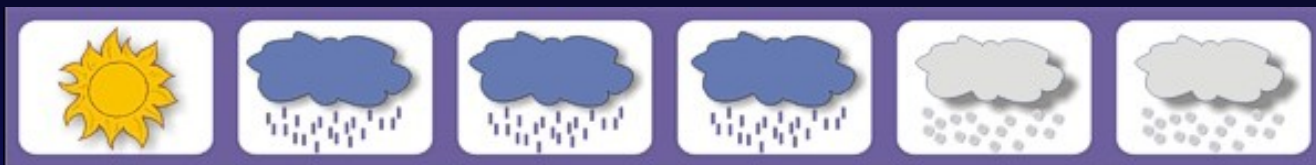


Matica prechodových pravdepodobností:

$$P = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.38 & 0.60 & 0.02 \\ 0.75 & 0.05 & 0.20 \end{bmatrix}$$



Predpokladajme, že v daný deň ($t = 1$) svieti na obed slnko. Aká je (vzhľadom na model) pravdepodobnosť, že nasledujúcich 5 dní bude na obed:



$$\Pr(S_{\text{Slnéčno}}) \times \Pr(S_{\text{Prší}} | S_{\text{Slnéčno}}) \times \Pr(S_{\text{Prší}} | S_{\text{Prší}}) \times \Pr(S_{\text{Prší}} | S_{\text{Prší}}) \times \Pr(S_{\text{Sneží}} | S_{\text{Prší}}) \times \Pr(S_{\text{Sneží}} | S_{\text{Sneží}}) = 0.70 \times 0.15 \times 0.60 \times 0.60 \times 0.02 \times 0.20 = 0.0001512$$

Formálne:

Definujeme postupnosť stavov $Q = \{S, D, D, D, C, C\}$ odpovedajúca času $t = 1, 2, \dots, 5$ a chceme určiť pravdepodobnosť, že nastane (vzhľadom na model) práve táto postupnosť:

$$\Pr(Q|\text{model}) = \Pr(S, D, D, S, C, C | \text{model}) = \pi_1 * p_{1,2} * p_{2,2} * p_{2,2} * p_{2,3} * p_{3,3} = 0.70 \times 0.15 \times 0.60 \times 0.60 \times 0.02 \times 0.20 = 0.0001512$$

Otázka:

Ak vieme, že v súčasnosti (v čase $t = 1$) je systém v stave i , aká je pravdepodobnosť, že v ňom ostane práve d časových intervalov?

$$Q = \left\{ \begin{matrix} i, i, i, \dots, i, j \neq i \\ 1, 2, 3, \dots, d, d+1 \end{matrix} \right\}$$

$$p_i(d) = \Pr(Q \mid \text{model}, q_1 = i) = 1 * p_{i,i} * \dots * p_{i,i} * (1 - p_{i,i}) = p_{i,i}^{d-1} * (1 - p_{i,i})$$

Funkcia $p_i(d)$ je diskrétna funkcia hustoty pravdepodobnosti zotrvania systému d časových intervalov po sebe v stave i .

Očakávaný počet pozorovaní v stave i nepretržite po sebe (za podmienky, že systém začal v stave i) $\bar{d}_i = \frac{1}{(1 - p_{i,i})}$



$$\bar{d}_1 = \frac{1}{(1 - p_{1,1})} = 5$$



$$\bar{d}_2 = \frac{1}{(1 - p_{2,2})} = 2.5$$



$$\bar{d}_3 = \frac{1}{(1 - p_{3,3})} = 1.25$$

Príklad 2 (HMM model):

Uvažujme:

3 stavy (1 = Slné, 2 = Prší, 3 = Sneží) $\Rightarrow m = 3$

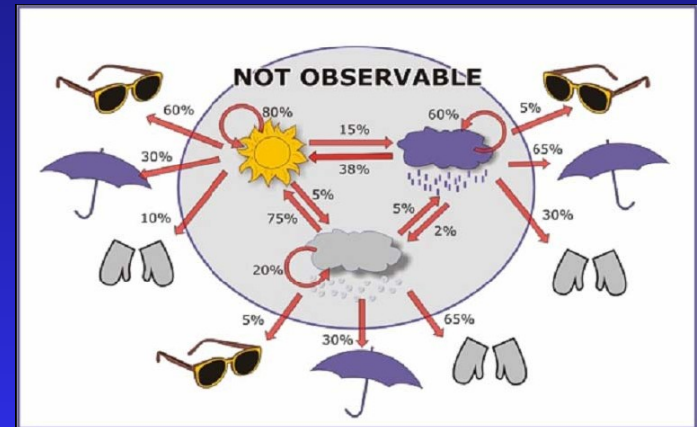
3 symboly (o_1 = okuliare, o_2 = dáždnik, o_3 = rukavice) $\Rightarrow N = 3$

Matica prechodových pravdepodobností stavov:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.38 & 0.60 & 0.02 \\ 0.75 & 0.05 & 0.20 \end{bmatrix}$$

Rozdelenie pravdepodobností symbolov:

Symbol \ Stav	1	2	3
o_1	0,60	0,05	0,05
o_2	0,30	0,65	0,30
o_3	0,10	0,30	0,65



Počiatkové rozdelenie stavov: $\pi = (0.70, 0.25, 0.05)$

Príklad 3

Pokus spočíva v hádzaní jednou alebo viacerými falošnými mincami. Mince hádže človek, skrytý za závesom, takže nevidíme, koľkými mincami hádže (skrytý pokus); oznámi nám len výsledok každého hodu mincou, ktorý môže byť

hlava (H)

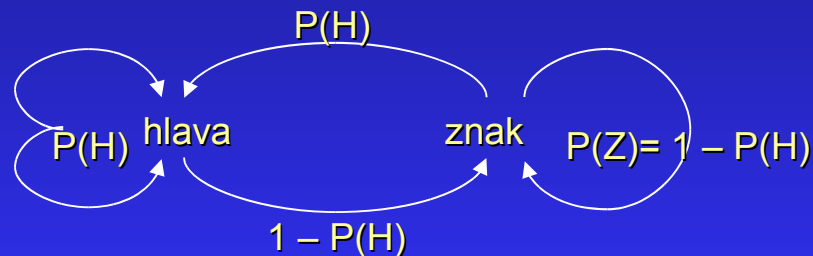


alebo znak (Z)



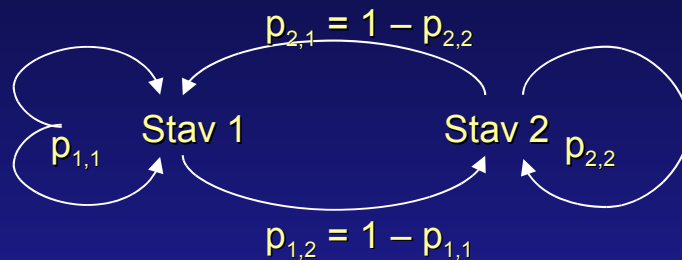
Prvá úloha – určiť počet stavov

a) Hádže sa iba jednou falošnou mincou $\Rightarrow$ vhodný je 2-stavový model (hlava, znak) $\Rightarrow$ pozorovateľný Markovov reťazec, ktorý je plne špecifikovaný pravdepodobnosťou nastania jedného z dvoch stavov (napr. padnutia hlavy)



Príklad 3 – pokračovanie 1

b) Hádže sa 2 falošnými mincami, predpokladáme 2 stavy, z ktorých každý odpovedá hodu jednej falošnej mince. Každý stav je teda charakterizovaný rozdelením pravdepodobnosti H a Z danej mince; prechod medzi stavmi je charakterizovaný prechodovou maticou.



stav	1	2
Pr(H)	p_1	p_2
Pr(Z)	$1 - p_1$	$1 - p_2$

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & 1 - p_{1,1} \\ 1 - p_{2,2} & p_{2,2} \end{bmatrix}$$

Dva stochastické procesy:

- ✓ Náhodný výber mince (jednej z dvoch) – skrytý proces
- ✓ Hod mincou (náhodne padne hlava alebo znak) – pozorovateľný proces

Výsledný model je typu HMM

Príklad 3 – pokračovanie 2

c) Hádže sa 3 falošnými mincami, predpokladáme 3 stavy, z ktorých každý odpovedá hodu jednej falošnej mince. Každý stav je teda charakterizovaný rozdelením pravdepodobnosti H a Z danej mince; prechod medzi stavmi je charakterizovaný prechodovou maticou.

stav	1	2	3
Pr(H)	p_1	p_2	p_3
Pr(Z)	$1 - p_1$	$1 - p_2$	$1 - p_3$

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & 1 - p_{1,1} - p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & 1 - p_{2,1} - p_{2,2} \\ 1 - p_{3,2} - p_{3,3} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

Dva stochastické procesy:

- ✓ Náhodný výber mince (jednej z troch) – skrytý proces
- ✓ Hod mincou (náhodne padne hlava alebo znak) – pozorovateľný proces

Výsledný model je typu HMM

Príklad 4

Predpokladajme, že máme m urien, v každej z nich je väčší počet loptičiek N rôznych farieb. Experiment prebieha nasledovne: Náhodne sa vyberie urna, z nej sa náhodne vyberie loptička a zapíše sa jej farba. Loptička sa potom vráti do tej istej urny, z ktorej bola vybratá. Celý proces sa opakuje n -krát.



urna 1



urna 2

.....



urna m

Stav optička	Urna 1	Urna 2	...	Urna m
$p_1 = \text{červená}$	$b_1(1)$	$b_2(1)$		$b_m(1)$
$p_2 = \text{zelená}$	$b_1(2)$	$b_2(2)$		$b_m(2)$
$p_3 = \text{modrá}$	$b_1(3)$	$b_2(3)$		$b_m(3)$
...				
$p_N = \text{zelená}$	$b_1(N)$	$b_2(N)$		$b_m(N)$

Dva stochastické procesy:

- ✓ Náhodný výber urny (jednej z m) – skrytý proces
- ✓ Z vybranej urny náhodný výber loptičky (ktorý sa riadi príslušným rozdelením pravdepodobnosti pre danú urnu) – pozorovateľný proces

Výsledný model je typu HMM

Markov – switching (MSW) modely

Modelovací cyklus MSW modelov:

1. Odhad parametrov modelu MSW.
2. Test nulovej hypotézy linearity modelu oproti alternatívnej hypotéze nelinearity typu MSW.
3. Overiť vhodnosť modelu diagnostickými testami.
4. Ak je potrebné, modifikovať model.
5. Použiť model na popisné účely a predikciu.

Je daný časový rad $O = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Pri MSW modeloch potrebujeme odhadnúť:

❑ počet stavov m , t.j. určiť $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$

❑ rozdelenie pravdepodobnosti prechodu z jedného stavu do druhého:

$$p_{i,j} = \Pr(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_i), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Predpokladáme ergodický proces $\Rightarrow p_{i,j} > 0$.

❑ počiatkové stavové pravdepodobnosti

$$\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_m\}, \quad \pi_i = \Pr(q_1 = S_i), \quad i = 1, \dots, m$$

❑ autoregresné parametre a reziduálne rozptyly v jednotlivých režimoch, t.j.

$$p = \max(p_1, \dots, p_m), \quad \Phi_i = \{\phi_{i,0}, \phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,p}\}, \quad \sigma_i^2, \quad i = 1, \dots, m$$

❑ postupnosť stavov $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, ktorá maximalizuje $\Pr(O, Q \mid \lambda)$, kde $\lambda = (P, \pi)$. Odhaduje sa pravdepodobnosť, s ktorou nastane stav S_i v čase t . Nakoniec sa v každom čase t vyberie stav q_t s najväčšou pravdepodobnosťou.

Osnova programu na siedme cvičenie

Odhad parametrov dvojrežimového modelu LSTAR:

- Určiť minimálnu a maximálnu hranicu pre výber parametra c
- Definovať logistickú prechodovú funkciu
- Pre rád p a oneskorenie d určené testom linearity oproti nelinearite typu LSTAR (5 najmenších hodnôt P-value) určiť parameter vyhladzovania γ a konštantu c
- Vypočítať odhad kovariančnej matice Σ vektora odhadovaných parametrov a štandardné chyby odhadov parametrov
- Vypočítať AIC a BIC pre jednotlivé LSTAR modely a na ich základe vybrať tri najlepšie modely

Osnova programu na siedme cvičenie - pokračovanie

Odhad parametrov dvojrežimového modelu ESTAR:

- Definovať exponenciálnu prechodovú funkciu
- Pre rád p a oneskorenie d určené testom linearity oproti nelinearite typu ESTAR (5 najmenších hodnôt P-value) určiť parameter vyhladzovania γ a konštantu c
- Vypočítať odhad kovariančnej matice Σ vektora odhadovaných parametrov a štandardné chyby odhadov parametrov
- Vypočítať AIC a BIC pre jednotlivé ESTAR modely a na ich základe vybrať tri najlepšie modely