

b) Odhad parametrov

Problematika odhadov parametrov STAR je detailne popísaná v práci Teräsvirta (1994)

Označme $p = \max(p_1, p_2)$. Model STAR má tvar:

$$X_t = \Phi'_1 Y_t (1 - G(q_t, \gamma, c)) + \Phi'_2 Y_t G(q_t, \gamma, c) + \varepsilon_t$$

Parametre $\theta = (\Phi'_1, \Phi'_2, \gamma, c)'$ odhadujeme minimalizáciou reziduálneho súčtu štvorcov (nelineárnou metódou najmenších štvorcov):

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^n (X_t - F(q_t, \theta))^2$$

kde $F(q_t, \theta) = \Phi'_1 Y_t (1 - G(q_t, \gamma, c)) + \Phi'_2 Y_t G(q_t, \gamma, c)$ je skeleton modelu

Najprv sa metódou najmenších štvorcov odhadnú parametre ϕ_1 a ϕ_2 :

$$\hat{\phi}(\gamma, \mathbf{c}) = \left(\sum_{t=k+1}^n \mathbf{Y}_t(\gamma, \mathbf{c}) \mathbf{Y}_t(\gamma, \mathbf{c})' \right)^{-1} \left(\sum_{t=k+1}^n \mathbf{Y}_t(\gamma, \mathbf{c}) \mathbf{X}_t \right)$$

kde $\mathbf{Y}_t(\gamma, \mathbf{c}) = (\mathbf{Y}_t' [1 - G(\mathbf{q}_t, \gamma, \mathbf{c})], \mathbf{Y}_t' G(\mathbf{q}_t, \gamma, \mathbf{c}))'$, $k = \max(p_1, p_2, d)$.

Reziduá:

$$\hat{\varepsilon}_t(\gamma, \mathbf{c}) = \mathbf{X}_t - \hat{\phi}(\gamma, \mathbf{c})' \mathbf{Y}_t(\gamma, \mathbf{c})$$

Odhad reziduálneho rozptylu:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(\gamma, \mathbf{c}) = \frac{1}{n - k} \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t(\gamma, \mathbf{c})^2$$

Odhad parametrov γ , $\mathbf{c}$ nelineárnou metódou najmenších štvorcov sa získa minimalizáciou reziduálneho rozptylu (na 2-rozmernej mriežke):

$$(\hat{\gamma}, \hat{\mathbf{c}}) = \underset{\gamma, \mathbf{c}}{\operatorname{argmin}} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(\gamma, \mathbf{c})$$

V praxi sa často nepodari získať presný odhad parametra γ . Je to spôsobené tým, že pri vysokých hodnotách γ sa tvar logistickej aj exponenciálnej funkcie mení len nepatrne, preto je potrebné mať k dispozícii mnoho hodnôt časového radu v malom okolí prahovej hodnoty $\mathbf{c}$.

Predpokladajme, že $\varepsilon_t \approx N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Potom (pri splnení podmienok regularity) sú odhady konzistentné a asymptoticky normálne:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow N(0, \Sigma)$$

kde θ sú skutočné hodnoty odhadovaných parametrov a Σ je asymptotická kovariančná matica vektora $\hat{\theta}$. Jej konzistentný odhad počítame nasledovne:

Označme $g_t(\hat{\theta}) = \varepsilon_t^2 = (X_t - F(q_t, \hat{\theta}))^2$

Hessova matica $g(\hat{\theta})$:

$$\hat{A}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \nabla^2 g_t(\hat{\theta}) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \left(\nabla F(q_t, \hat{\theta}) \cdot \nabla F(q_t, \hat{\theta})' - \varepsilon_t \nabla^2 F(q_t, \hat{\theta}) \right)$$

Vonkajší súčin gradientov $g_t(\hat{\theta})$:

$$\hat{B}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \nabla g_t(\hat{\theta}) \cdot \nabla g_t(\hat{\theta})' = \frac{4}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \nabla F(q_t, \hat{\theta}) \cdot \nabla F(q_t, \hat{\theta})'$$

Konzistentný odhad kovariančnej matice $\hat{\Sigma}$ vektora odhadovaných parametrov $\hat{\theta}$:

$$\hat{\Sigma} = \hat{A}_n^{-1} \cdot \hat{B}_n \cdot \hat{A}_n^{-1}$$

Informačné kritériá pre STAR model s m režimami

Označme:

$$n_j = \sum_{t=1}^n \Delta G_{j,t}$$

kde G_j je prechodová funkcia j-teho režimu, $\Delta G_{j,t} = G_{j-1,t} - G_{j,t}$, ($G_{0,t} = 1$, $G_{m,t} = 0$) pre všetky $t = 1, \dots, n$.

$$AIC(p_1, \dots, p_m) = \sum_{j=1}^m \left(n_j \ln(\hat{\sigma}_j^2) + 2(p_j + 1) \right)$$

$$BIC(p_1, \dots, p_m) = \sum_{j=1}^m \left(n_j \ln(\hat{\sigma}_j^2) + (p_j + 1) \ln(n_j) \right)$$

kde $\hat{\sigma}_j^2$ je odhadovaný rozptyl reziduí v j-tom režime:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{t=k+1}^n \left(X_t - \hat{\Phi}'_j \cdot Y_t \right)^2 \cdot \Delta G_{j,t}$$

c) Diagnostická kontrola modelu

Diagnostická kontrola spočíva podobne ako pri lineárnych modeloch v testovaní rezíduí modelu. Testy, ktoré sa používajú pri lineárnych modeloch však v prípade modelov STAR nie je možné použiť, pretože nie je známe asymptotické rozdelenie testovacích kritérií pri platnosti nulovej hypotézy.

Uvedieme si dva typy diagnostických testov: testovanie autokorelácie rezíduí a ostávajúcej nelinearity.

V obidvoch testoch predpokladáme, že model STAR má tvar:

$$X_t = \Phi'_1 Y_t (1 - G(q_t, \gamma, c)) + \Phi'_2 Y_t G(q_t, \gamma, c) + u_t$$

ktorý môžeme upraviť:

$$X_t = \Phi'_1 Y_t + \Phi'_3 Y_t G(q_t, \gamma, c) + u_t$$

$$\text{kde } \Phi'_3 = (\Phi'_2 - \Phi'_1)', F(q_t, \delta) = \Phi'_1 Y_t + \Phi'_3 Y_t G(q_t, \gamma, c)$$

1. Testovanie autokorelácie reziduí

Predpokladáme, že reziduá u_t môžeme napísať v tvare AR(q)

$$u_t = \sum_{j=1}^q \omega_j u_{t-j} + a_t$$

kde korene rovnice $1 - \omega_1 B - \dots - \omega_q B^q = 0$ ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine a $\{a_t\}$ je proces striktného bieleho šumu.

Test hypotézy $H_0: \omega = 0$ pozostáva z niekoľkých krokov:

1. Nelineárnou metódou najmenších štvorcov odhadneme parametre modelu STAR, vypočítame reziduá $\hat{u}_t$ a reziduálny súčet štvorcov SSR_0

2. Z pomocnej regresie, ktorá má na ľavej strane reziduá a na pravej strane $(\hat{u}_{t-1}, \dots, \hat{u}_{t-q})'$, $\frac{\partial F}{\partial \phi_1}, \frac{\partial F}{\partial \phi_3}, \frac{\partial F}{\partial \gamma}, \frac{\partial F}{\partial c}$ vypočítame reziduálny súčet štvorcov SSR_1 a index determinácie $R^2 = 1 - SSR_1/SSR_0$.

asymptoticky rozdelenie $\chi^2(q)$.

Tento test môžeme použiť aj na testovanie autokorelácie rezíduí pre model SETAR. Pretože sa pri ňom požaduje, aby bol skeleton $F(q_t, \theta)$ spojitá 2x-diferencovateľná funkcia (čo indikačná funkcia $I(A)$ nespĺňa), aproximujeme model SETAR modelom LSTAR s veľkou hodnotou γ . Ostatné parametre odhadneme nelineárnou metódou najmenších štvorcov. Z pomocnej regresie vynecháme člen $\partial F / \partial \gamma$ (pretože γ považujeme v tomto prípade za konštantu)

2a. Testovanie ostávajúcej nelinearity pre LSTAR

Nulová hypotéza je dvojrežimový LSTAR model, alternatívna trojrežimový LSTAR model, ktorý môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned}X_t &= \Phi_1' Y_t + (\Phi_2 - \Phi_1)' Y_t G_1(q_t, \gamma_1, c_1) + (\Phi_3 - \Phi_2)' Y_t G_2(q_t, \gamma_2, c_2) + \varepsilon_t = \\&= \Phi_1' Y_t + \Psi' Y_t G_1(q_t, \gamma_1, c_1) + (\Phi_3 - \Phi_2)' Y_t G_2(q_t, \gamma_2, c_2) + \varepsilon_t = \\&= F_1(q_t, \theta_1) + (\Phi_3 - \Phi_2)' Y_t G_2(q_t, \gamma_2, c_2) + \varepsilon_t\end{aligned}$$

kde G_1 a G_2 sú logistické funkcie a predpokladáme $c_1 < c_2$.

Nahradíme funkciu $G_2(q_t, \gamma_2, c_2)$ funkciou $G_2^*(q_t, \gamma_2, c_2) = G_2(q_t, \gamma_2, c_2) - 0.5$, ktorú aproximujeme v okolí $\gamma_2 = 0$ Taylorovým polynómom 3. stupňa.

Po úpravách dostaneme regresný model

$$X_t = \beta_0' Y_t + \Psi' Y_t G_1(q_t, \gamma_1, c_1) + \beta_1' \tilde{Y}_t q_t + \beta_2' \tilde{Y}_t q_t^2 + \beta_3' \tilde{Y}_t q_t^3 + \hat{\varepsilon}_t$$

kde $\tilde{Y}_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$,

$\beta_j = (\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,p})'$, $j = 0, 1, 2, 3$ sú funkcie parametrov $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \gamma_2, c_2$.

Test hypotézy $H_0: \Phi_2 = \Phi_3 \Leftrightarrow H_0: \gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ pozostáva z niekoľkých krokov:

1. Nelineárnou metódou najmenších štvorcov odhadneme parametre dvojrežimového modelu LSTAR, vypočítame reziduá $\hat{u}_t$ a reziduálny súčet štvorcov SSR_1

2. Z pomocnej regresie, ktorá má na ľavej strane $\hat{u}_t$ a na pravej strane funkcie $\nabla \hat{F}_1(q_t, \hat{\theta}_1) = \left(\frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial \Phi_1}, \frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial \Psi}, \frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial c_1} \right)$ doplnené funkciami $\tilde{Y}_t q_t^j, j = 1, 2, 3$ vypočítame reziduálny súčet štvorcov SSR_2 a index determinácie

$$R^2 = 1 - SSR_2 / SSR_1 .$$

3. Testovacie kritérium $LM = n R^2$ má za predpokladu platnosti nulovej hypotézy asymptoticky rozdelenie $\chi^2(3p)$.

2b. Testovanie ostávajúcej nelinearity pre ESTAR

Nulová hypotéza je dvojrežimový ESTAR model, alternatívna trojrežimový ESTAR model, ktorý môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned}X_t &= \Phi_1' Y_t + (\Phi_2 - \Phi_1)' Y_t G_1(q_t, \gamma_1, c_1) + (\Phi_3 - \Phi_2)' Y_t G_2(q_t, \gamma_2, c_2) + \varepsilon_t = \\&= \Phi_1' Y_t + \Psi' Y_t G_1(q_t, \gamma_1, c_1) + (\Phi_3 - \Phi_2)' Y_t G_2(q_t, \gamma_2, c_2) + \varepsilon_t = \\&= F_1(q_t, \theta_1) + (\Phi_3 - \Phi_2)' Y_t G_2(q_t, \gamma_2, c_2) + \varepsilon_t\end{aligned}$$

kde G_1 a G_2 sú exponenciálne funkcie a predpokladáme $c_1 < c_2$.

Aproximujeme funkciu $G_2(q_t, \gamma_2, c_2)$ v okolí $\gamma_2 = 0$ Taylorovým polynómom 1. stupňa.

Po úpravách dostaneme regresný model

$$X_t = \beta_0' Y_t + \Psi' Y_t G_1(q_t, \gamma_1, c_1) + \beta_1' \tilde{Y}_t q_t + \beta_2' \tilde{Y}_t q_t^2 + \hat{\varepsilon}_t$$

kde $\tilde{Y}_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$,

$\beta_j = (\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,p})'$, $j = 0, 1, 2$ sú funkcie parametrov $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \gamma_2, c_2$.

Test hypotézy $H_0: \Phi_2 = \Phi_3 \Leftrightarrow H_0: \gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$ pozostáva z niekoľkých krokov:

1. Nelineárnou metódou najmenších štvorcov odhadneme parametre dvojrežimového modelu ESTAR, vypočítame reziduá $\hat{u}_t$ a reziduálny súčet štvorcov SSR_1

2. Z pomocnej regresie, ktorá má na ľavej strane $\hat{u}_t$ a na pravej strane funkcie $\nabla \hat{F}_1(q_t, \hat{\theta}_1) = \left(\frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial \Phi_1}, \frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial \Psi}, \frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial F_1(q_t, \hat{\theta}_1)}{\partial c_1} \right)$ doplnené funkciami $\tilde{Y}_t q_t^j, j = 1, 2$ vypočítame reziduálny súčet štvorcov SSR_2 a index determinácie

$$R^2 = 1 - SSR_2 / SSR_1 .$$

3. Testovacie kritérium $LM = n R^2$ má za predpokladu platnosti nulovej hypotézy asymptoticky rozdelenie $\chi^2(2p)$.

Testovanie linearity oproti nelinearite typu LSTAR:

1. Definovať logistickú prechodovú funkciu
2. Vo vonkajšom cykle pre p od 1 po $p_{\max}$
 - Určiť vhodný lineárny model $AR(p)$ pomocou lineárnej regresie
a vypočítať reziduálny súčet štvorcov SSR_0 $X_t = a_0 + b'_0 \tilde{Y}_t + \hat{e}_t$
3. V cykle pre oneskorenie d (od 1 po p) priradiť $q_t = X_{t-d}$
 - Urobiť pomocnú regresiu v tvare a
vypočítať reziduálny súčet štvorcov SSR_1
 - Vypočítať index determinácie $R^2 = 1 - SSR_1/SSR_0$
 - Vypočítať testovaciu štatistiku $LM_3 = n R^2$, ktorá má asymptoticky $\chi^2(3p)$
 - Určiť P -hodnotu $\hat{e}_t = \alpha_0 + \beta'_0 \tilde{Y}_t + \beta'_1 \tilde{Y}_t q_t + \beta'_2 \tilde{Y}_t q_t^2 + \beta'_3 \tilde{Y}_t q_t^3 + \hat{\eta}_t$
4. Vybrať 5 LSTAR modelov s najmenšími P -hodnotami.

Testovanie linearity oproti nelinearite typu ESTAR:

1. Definovať exponenciálnu prechodovú funkciu
2. Vo vonkajšom cykle pre p od 1 po $p_{\max}$
 - Určiť vhodný lineárny model $AR(p)$ pomocou lineárnej regresie a vypočítať reziduálny súčet štvorcov SSR_0
3. V cykle pre oneskorenie d (od 1 po p) priradiť $q_t = X_{t-d}$

$X_t = a_0 + b'_0 \tilde{Y}_t + \hat{e}_t$

 - Urobiť pomocnú regresiu v tvare
vypočítať reziduálny súčet štvorcov SSR_1
 - Vypočítať index determinácie $R^2 = 1 - SSR_1/SSR_0$
 - Vypočítať testovaciu štatistiku $LM_2 = n R^2$, ktorá má asymptoticky $\chi^2(2p)$
 - Určiť P-hodnotu
$$\hat{e}_t = \alpha_0 + \beta'_0 \tilde{Y}_t + \beta'_1 \tilde{Y}_t q_t + \beta'_2 \tilde{Y}_t q_t^2 + \hat{\eta}_t$$
4. Vybrať 5 ESTAR modelov s najmenšími P-hodnotami.