

**Viacrežimové modely s režimami určenými
pozorovatelnými premennými**

Modely SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive)

SETAR je špeciálnym prípadom TAR modelu, kde sa ako indikačná premenná q_t berie hodnota časového radu posunutá v čase o $d \in \mathbb{N}$ časových intervalov, teda $q_t = X_{t-d}$ pre určité prirodzené číslo d . Výsledný model sa nazýva SETAR model (**S**elf-**E**xciting **T**AR). SETAR model je lineárny vo vnútri každého režimu, ale prechádza z jedného režimu do druhého pri prekročení prahovej hodnoty premennou q_t .

2-režimový SETAR model s režimami $AR(p_1)$ a $AR(p_2)$ má tvar:

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \dots + \varphi_{1,p_1}X_{t-p_1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \dots + \varphi_{2,p_2}X_{t-p_2} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} > c \end{cases}$$

resp. pomocou indikačnej funkcie

$$\begin{aligned} X_t &= Y'_{t,1} \Phi_1 I(X_{t-d} \leq c) + Y'_{t,2} \Phi_2 I(X_{t-d} > c) + \varepsilon_t = \\ &= Y'_{t,1} \Phi_1 [1 - I(X_{t-d} > c)] + Y'_{t,2} \Phi_2 I(X_{t-d} > c) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

kde $Y_{t,i} = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p_i})'$ a $\Phi_i = (\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,p_i})'$, $i = 1, 2$

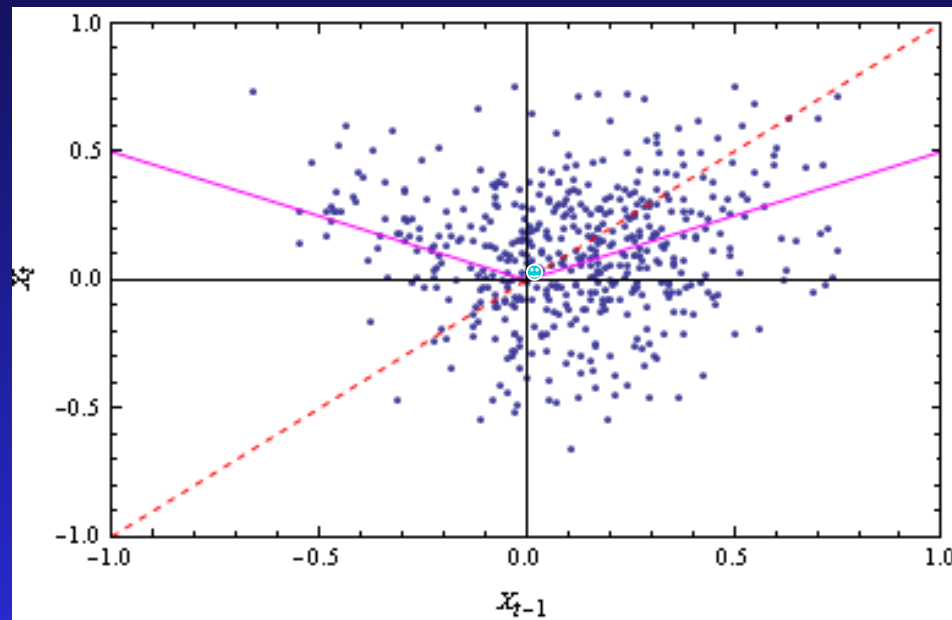
$I[A]$ je indikačná funkcia,

$\{\varepsilon_t\}$ je proces bieleho šumu s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ_ε^2 .

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases} \quad (1)$$

Ekvilibrium modelu je v bode X^* , ak X^* je pevný bod skeletonu t.j. $F(X^*, \theta) = X^*$ alebo (pre tento model ekvivalentné) priesečník skeletonu so 45° priamkou.

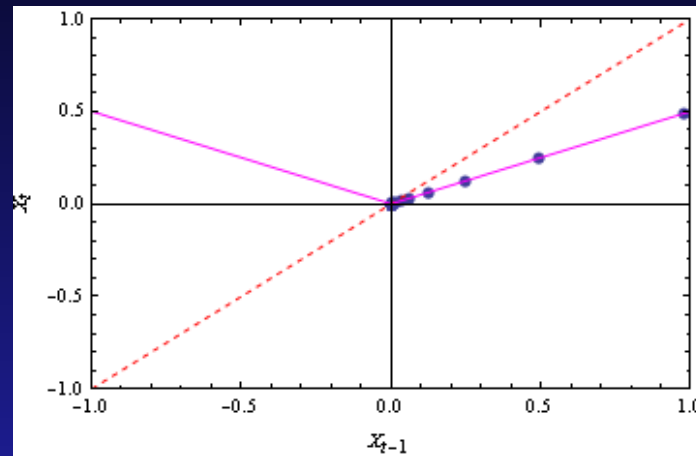
$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = \varphi_{2,0} = 0; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5;$$



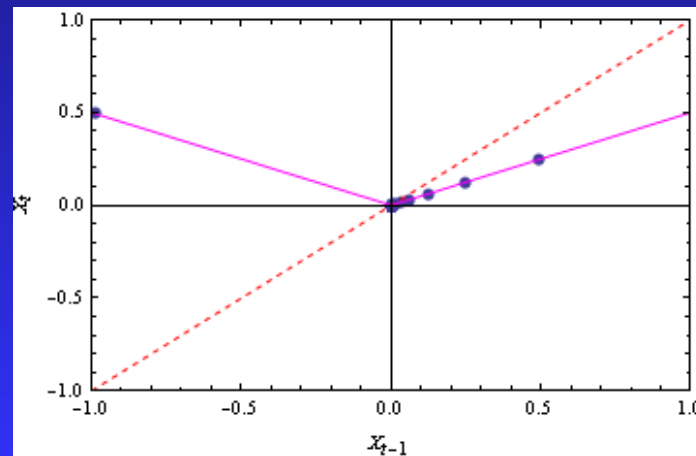
Jediné stabilné equilibrium $X^* = 0$, $E[X_t] \neq 0$

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = \varphi_{2,0} = 0; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; \quad X_0 = 1$$

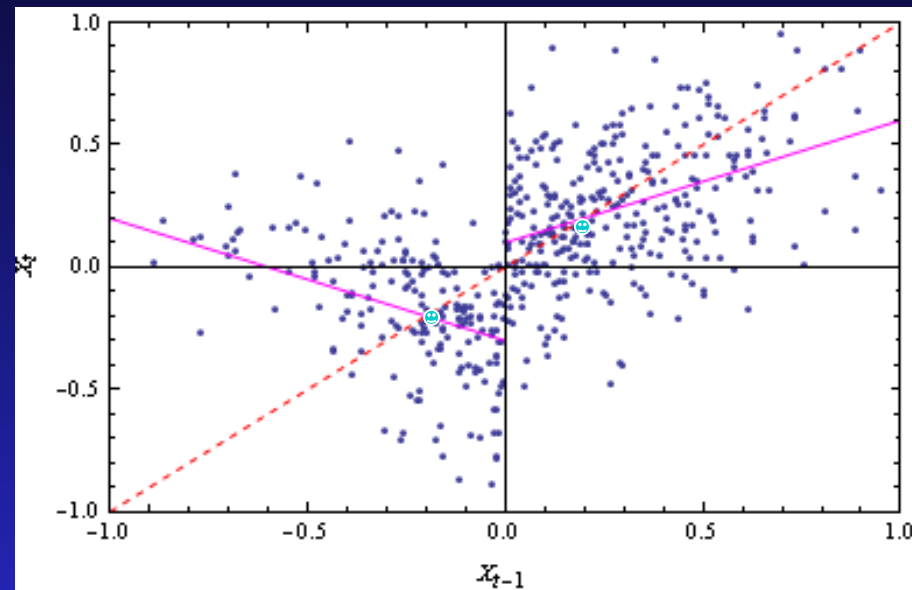


$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = \varphi_{2,0} = 0; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; \quad X_0 = -1$$



$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

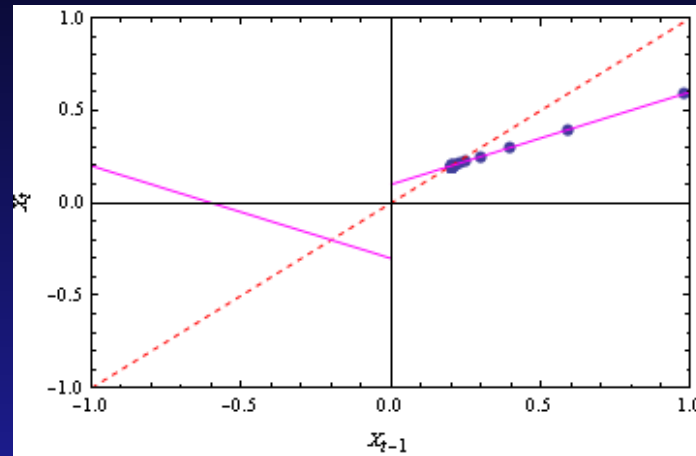
$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = 0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \varphi_{2,1} = 0.5;$$



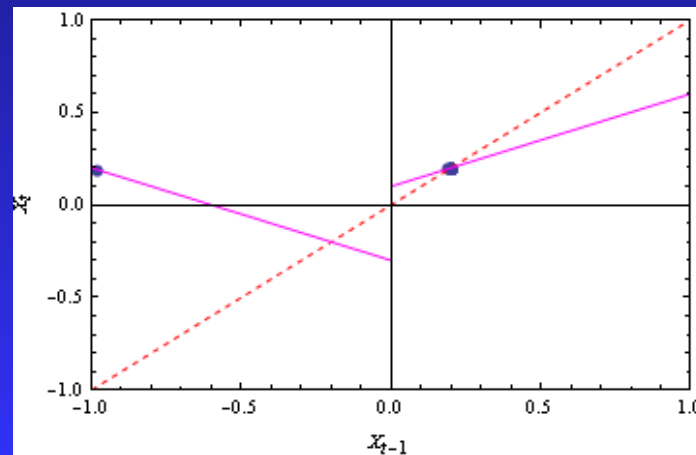
Dve stabilné equilibria $X^{1,*} = -0.2, X^{2,*} = 0.2$

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = 0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = 1$$

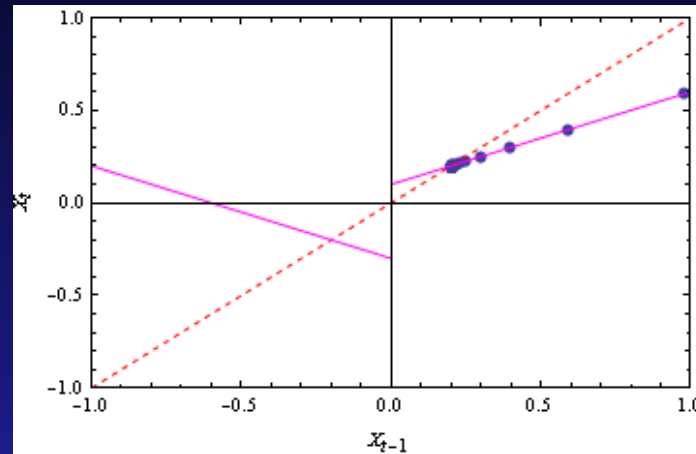


$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = 0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = -1$$

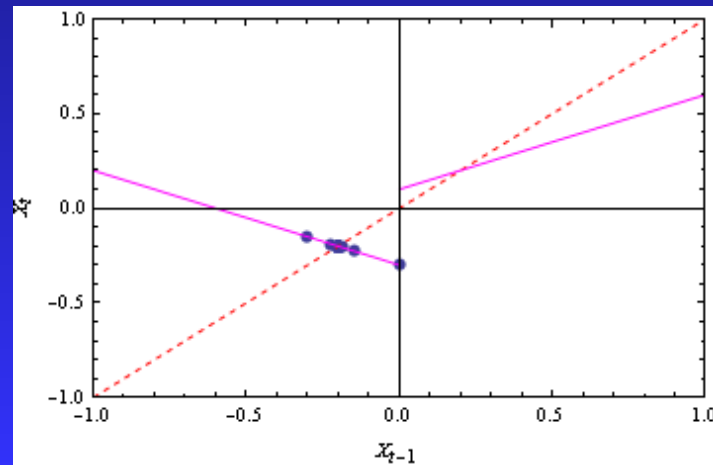


$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = 0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = 1$$

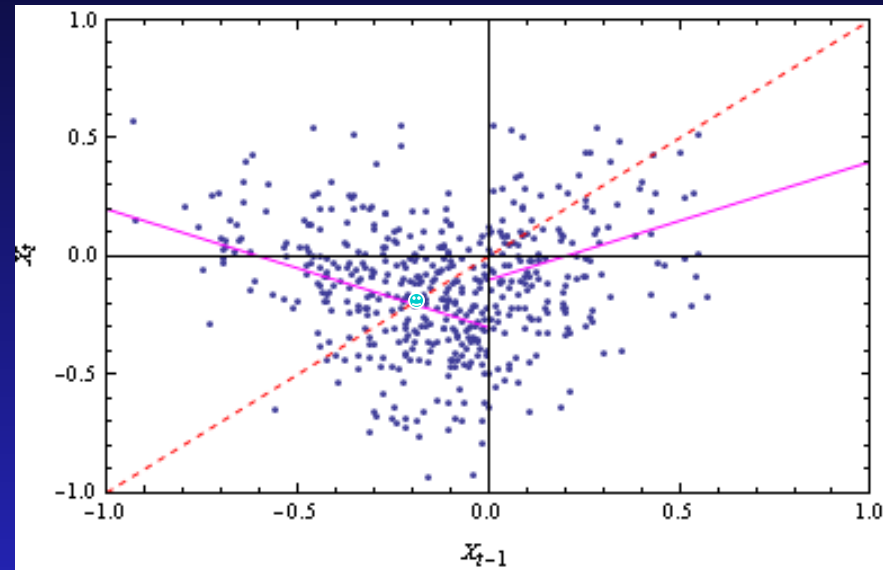


$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = 0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = 0$$



$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

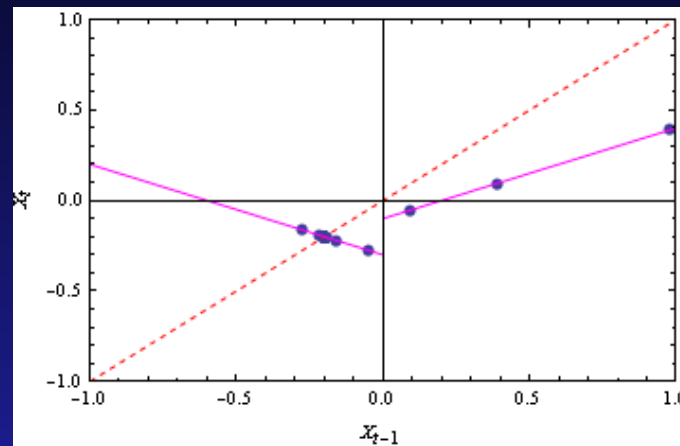
$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = -0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \varphi_{2,1} = 0.5;$$



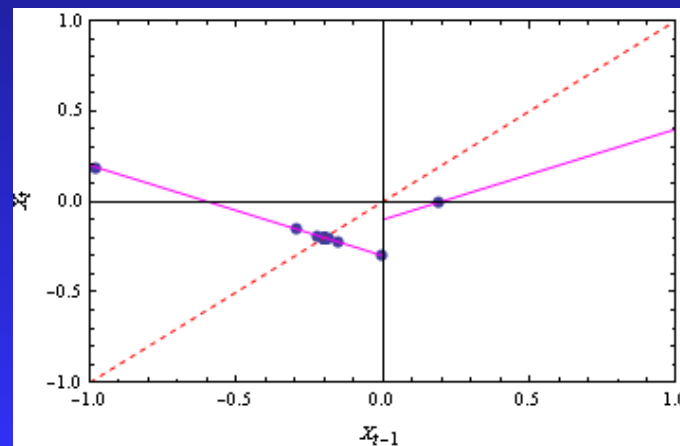
Jedno stabilné equilibrium $X^* = -0.2$

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = -0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = 1$$

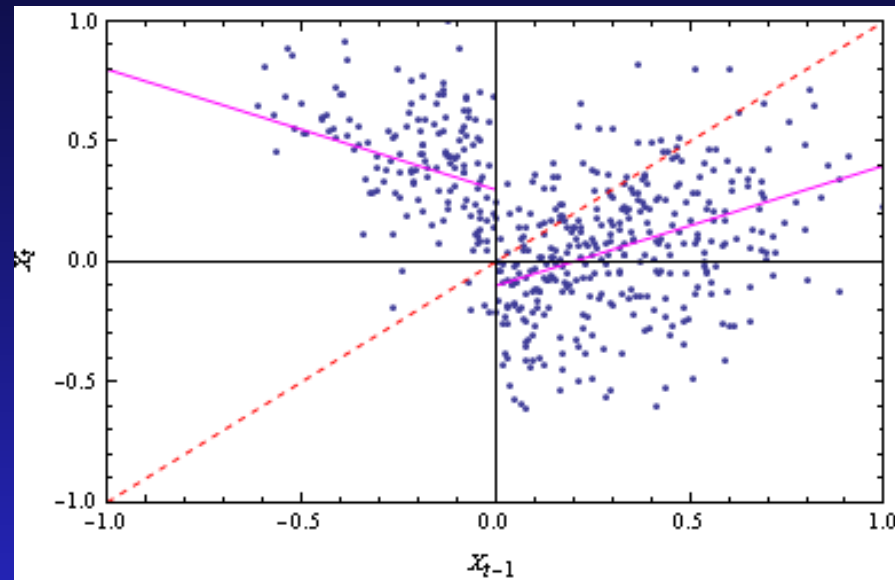


$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = -0.3; \varphi_{2,0} = -0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = -1$$



$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

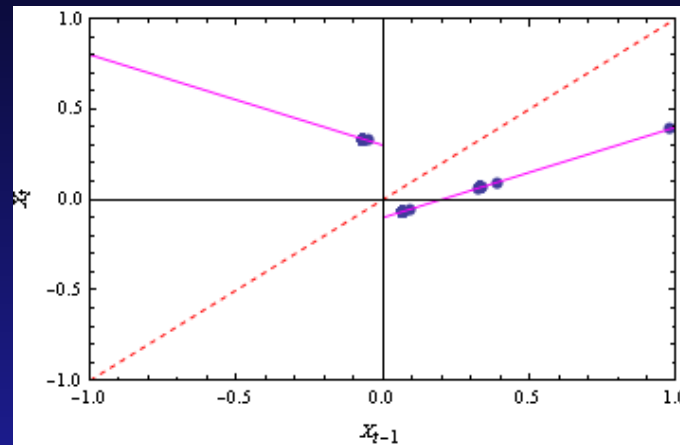
$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = 0.3; \varphi_{2,0} = -0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \varphi_{2,1} = 0.5;$$



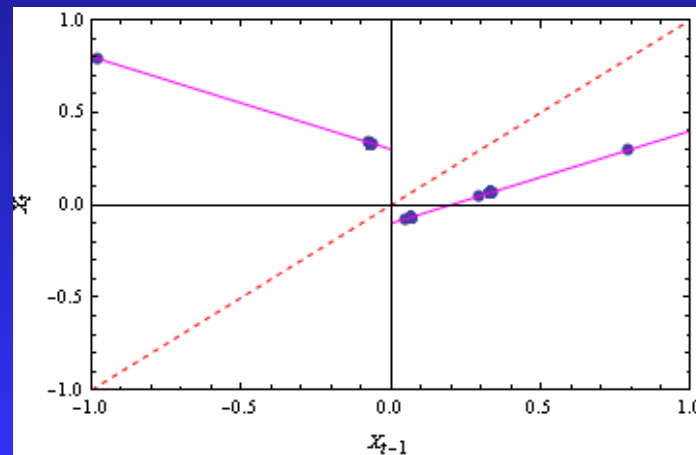
Neexistuje equilibrium

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases}$$

$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = 0.3; \varphi_{2,0} = -0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = 1$$



$$c = 0; \quad \varphi_{1,0} = 0.3; \varphi_{2,0} = -0.1; \quad \varphi_{1,1} = -0.5; \quad \varphi_{2,1} = 0.5; X_0 = -1$$



Niekedy dva režimy nestačia. V tomto prípade môžu nastať dve situácie:

- a) režimy sú charakterizované jednou premennou
- b) režimy sú charakterizované kombináciou viacerých premenných.

V prvom prípade za predpokladu m režimov definujeme $m + 1$ konštant $c_0, c_1, \dots, c_m$, pre ktoré platí:

$$-\infty = c_0 < c_1 < \dots < c_m = +\infty .$$

Model SETAR s $AR(p_i)$, $i = 1, \dots, m$ v jednotlivých režimoch má v tomto prípade tvar:

$$X_t = \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}X_{t-1} + \dots + \varphi_{i,p_i}X_{t-p_i} + \varepsilon_t \quad \text{pre } c_{i-1} < X_{t-d} \leq c_i$$

Model, v ktorom sú režimy určené kombináciou premennými (napr. X_{t-1} a X_{t-2}) má za predpokladu prahových konštant c_1, c_2 a modelu $AR(1)$ vo všetkých režimoch tvar :

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} \leq c_1 \text{ a } X_{t-2} \leq c_2 \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} \leq c_1 \text{ a } X_{t-2} > c_2 \\ \varphi_{3,0} + \varphi_{3,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} > c_1 \text{ a } X_{t-2} \leq c_2 \\ \varphi_{4,0} + \varphi_{4,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} > c_1 \text{ a } X_{t-2} > c_2 \end{cases}$$

Nakreslite 3-režimový SETAR proces (dĺžky $n = 500$) pre $p_1 = p_3 = 1$, $p_2 = 2$, $d = 1$ s počiatočnými hodnotami $X_0 = 2$, $X_1 = 2.1$. Vypočítajte počet dát v jednotlivých režimoch.

Model má tvar:

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c_1 \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \varphi_{2,2}X_{t-2} + \varepsilon_t & \text{ak } c_1 < X_{t-1} \leq c_2 \\ \varphi_{3,0} + \varphi_{3,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} > c_2 \end{cases}$$

resp. pomocou indikačnej funkcie

$$X_t = Y'_{t,1} \Phi_1 I(X_{t-1} \leq c_1) + Y'_{t,2} \Phi_2 I(c_1 < X_{t-1} \leq c_2) + Y'_{t,3} \Phi_3 I(X_{t-1} > c_2) + \varepsilon_t$$

kde

$$Y_{t,i} = (1, X_{t-1})' \text{ a } \Phi_i = (\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1})', i = 1, 3, Y_{t,2} = (1, X_{t-1}, X_{t-2})' \text{ a } \Phi_2 = (\varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,2})'$$

$$c_1 = 0.5; c_2 = 2; \quad \varphi_{1,0} = -0.2; \quad \varphi_{1,1} = -0.8; \quad \varphi_{2,0} = 0.2; \quad \varphi_{2,1} = 0.4; \quad \varphi_{2,2} = -0.2; \\ \varphi_{3,0} = 0.6; \quad \varphi_{3,1} = 0.65;$$

Vyskúšajte tento model aj pre iné počiatočné hodnoty a hodnoty parametrov.

Nakreslite 4-režimový SETAR proces (dĺžky $n = 500$) pre $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$, v ktorom sú režimy charakterizované kombináciou premenných X_{t-1} a X_{t-2} s počiatočnými hodnotami $X_0 = 2$, $X_1 = 2.1$. Vypočítajte počet dát v jednotlivých režimoch.

Model má tvar:

$$X_t = \begin{cases} \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} \leq c_1 \text{ a } X_{t-2} \leq c_2 \\ \varphi_{2,0} + \varphi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} \leq c_1 \text{ a } X_{t-2} > c_2 \\ \varphi_{3,0} + \varphi_{3,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} > c_1 \text{ a } X_{t-2} \leq c_2 \\ \varphi_{4,0} + \varphi_{4,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} > c_1 \text{ a } X_{t-2} > c_2 \end{cases}$$

$c_1 = 0.5$; $c_2 = 2$; $\varphi_{1,0} = -0.2$; $\varphi_{1,1} = -0.8$; $\varphi_{2,0} = 0.2$; $\varphi_{2,1} = 0.4$;

$\varphi_{3,0} = 0.6$; $\varphi_{3,1} = -0.2$; $\varphi_{4,0} = 0.1$; $\varphi_{4,1} = 0.8$;

Vyskúšajte tento model aj pre iné počiatočné hodnoty a hodnoty parametrov.

a) Odhad parametrov pre model SETAR

Budeme uvažovať 2-režimový SETAR model s režimami $AR(p_1)$ a $AR(p_2)$. Jeho tvar je:

$$X_t = Y_t' \Phi_1 I(\mathbf{X}_{t-d} \leq \mathbf{c}) + Y_t' \Phi_2 I(\mathbf{X}_{t-d} > \mathbf{c}) + \varepsilon_t$$

kde

$$Y_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})' \text{ a } \Phi_i = (\phi_{i,0}, \phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,p})', i = 1, 2$$

$$p = \max(p_1, p_2)$$

$I[A]$ je indikačná funkcia s hodnotami $I[A] = 1$, ak udalosť A nastane a $I[A] = 0$, ak nenastane

$\{\varepsilon_t\}$ je proces bieleho šumu s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ_ε^2 .

Najprv sa metódou najmenších štvorcov odhadnú parametre ϕ_1 a ϕ_2 :

$$\hat{\phi}(\mathbf{c}) = \left(\sum_{t=k+1}^n \mathbf{Y}_t(\mathbf{c}) \mathbf{Y}_t(\mathbf{c})' \right)^{-1} \left(\sum_{t=k+1}^n \mathbf{Y}_t(\mathbf{c}) \mathbf{X}_t \right)$$

kde $\mathbf{Y}_t(\mathbf{c}) = (\mathbf{Y}_t' [1 - I(\mathbf{X}_{t-d} > \mathbf{c})], \mathbf{Y}_t' [I(\mathbf{X}_{t-d} > \mathbf{c})])'$, $k = \max(p_1, p_2 \cdot d)$.

Reziduá:

$$\hat{\varepsilon}_t(\mathbf{c}) = \mathbf{X}_t - \hat{\phi}(\mathbf{c})' \mathbf{Y}_t(\mathbf{c})$$

Odhad rozptylu:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(\mathbf{c}) = \frac{1}{n - k} \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t(\mathbf{c})^2$$

Odhad parametra $\mathbf{c}$ metódou najmenších štvorcov sa získa minimalizáciou reziduálneho rozptylu:

$$\hat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathbf{C}}{\operatorname{argmin}} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(\mathbf{c})$$

$\mathbf{C}$ musí byť taká, aby každý režim obsahoval minimálne 15% pozorovaní.

Identifikáciu vhodných prahových hodnôt, oneskorení a rádov p_i , $i = 1, \dots, m$ pre $AR(p_i)$ modely v jednotlivých režimoch môžeme robiť minimalizáciou informačných kritérií.

Tong definoval **AIC** (Akaike's Information Criterion) pre m -režimový SETAR model

$$AIC(p_1, \dots, p_m) = \sum_{i=1}^m \left[n_i \ln \hat{\sigma}_i^2 + 2(p_i + 1) \right]$$

kde n_i je počet pozorovaní a $\hat{\sigma}_i^2$ je reziduálny rozptyl v i -tom režime, $i = 1, \dots, m$.

BIC (Bayesian Information Criterion) pre m -režimový SETAR model definovali Franses a van Dijk analogicky:

$$BIC(p_1, \dots, p_m) = \sum_{i=1}^m \left[n_i \ln \hat{\sigma}_i^2 + (p_i + 1) \ln n_i \right]$$

Zdefinujte funkcie na výpočet AIC a BIC. Vypočítajte AIC a BIC pre vygenerovaný 2-, 3- a 4-režimový SETAR model.

Osnova programu na druhé cvičenie

Odhad parametrov modelu SETAR:

- Nahrať balíky na analýzu časových radov a definičný súbor
- Zadefinovať funkcie pre:
 1. indikačnú funkciu
 2. premenné pre prvý a druhý režim
 3. skeleton (deterministická časť modelu)
 4. odhad autoregresných parametrov
 5. model SETAR (skeleton + ε_t)
 6. informačné kritériá AIC a BIC.

Osnova programu na druhé cvičenie - pokračovanie

➤ **Určiť minimálnu a maximálnu hranicu pre výber parametra c :**

1. usporiadať dáta (označiť napr. du)
2. vypočítať $k1 = \text{Round}[0.075 \cdot n]$, $k2 = \text{Round}[0.925 \cdot n]$
3. minimálna hranica pre parameter c je $h_{\min} = du[[k1]]$
4. maximálna hranica pre parameter c je $h_{\max} = du[[k2]]$

➤ **Vytvoriť procedúru pre odhad parametrov modelu SETAR ako tri do seba vnorené cykly:**

1. vonkajší cyklus je pre rád p (od 1 po $p_{\max}$)
2. v ňom je vnorený cyklus pre parameter oneskorenia d (od 1 po p)
3. najvnútornejší cyklus je pre parameter c od $h_{\min}$ po $h_{\max}$ s odporúča-ným krokom $(h_{\max} - h_{\min})/100$.

➤ **Vypísať najlepší model pre každú hodnotu p v tvare: c, d, p, AIC, BIC**