

6. Operátory v Hilbertovom priestore

Úvod

Budeme sa zaoberať rovnicou typu

$$(6.1) \quad Au = f, \text{ kde}$$

A - je určitý operátor, v aplikáciách najčastejšie diferenciálny operátor,
 f - je daný prvok, spravidla nejaká funkcia niektorého Hilbertovho priestoru,
 u - je hľadané riešenie.

Príklad 6.1: Uvažujeme rovinnú oblasť G s hranicou Γ . Riešme na oblasti G Poissonovu rovnicu s homogénnou Dirichletovou podmienkou:

$$(6.2) \quad \Delta u(x, y) = f(x, y)$$

$$(6.3) \quad u = 0, \text{ na } \Gamma$$

Nech zatiaľ je funkcia f spojitá v uzavretej oblasti $\overline{G}$.

Nájsť tzv. **klasické riešenie** tohto problému znamená nájsť takú funkciu $u(x, y)$, ktorá je v uzavretej oblasti $\overline{G}$ spojitá v oblasti G spĺňa Poissonovu rovnicu a na hranici je nulová. Keďže funkcia f je spojitá, riešenie hľadáme v množine funkcií spojitých až do druhých parciálnych derivácií v $\overline{G}$, teda je z priestoru $C^2(\overline{G})$ a navyše sú na hranici rovné nule. Množina týchto funkcií tvorí lineárny priestor (pri obvyklej definícii sčítania funkcií a násobenia skalárom). Označme túto množinu M_1 . Takže úlohu môžeme preformulovať takto:

Máme riešiť rovnicu $\Delta u = f$ v lineárnom priestore M_1 .

O lineárnom priestore M_1 hovoríme ako o **definičnom obore** uvedeného operátora Δ . Na prvky tohto priestoru potom aplikujeme uvedený operátor, ktorý každej funkcii $u \in M_1$ priradí spojitú funkciu v vzťahu: $v = \Delta u$. Tieto funkcie tvoria opäť lineárny priestor, označme ho N a budeme ho nazývať obor hodnôt daného operátora.

Operátory v Hilbertovom priestore

Definícia 6.1: Nech sú dané dve množiny M_1 a M_2 . Hovoríme, že na množine M_1 je definovaný **operátor** A zobrazujúci množinu M_1 do množiny M_2 ak je daný predpis, podľa ktorého je každému prvku $u \in M_1$ jednoznačne priradený určitý prvok $v \in M_2$.

$$\text{Píšeme: } (6.4) \quad v = Au.$$

Množinu M_1 voláme **definičný obor** operátora A . Množinu $N \subset M_2$, ktorú dostaneme zo vzťahu (6.2) pre všetky $u \in M_1$ nazývame **oborom hodnôt** operátora A . Označujeme ju R_A .

Definícia 6.2.: Ak platí $R_A = M_2$, hovoríme, že operátor A zobrazuje množinu M_1 **na** M_2 (surjektívny operátor, surjekcia)

Poznámka 6.1: Ekvivalentná definícia: Hovoríme, že operátor A zobrazuje množinu M_1 **na** M_2 ak ju zobrazuje do množiny M_2 a ku každému prvku $v \in M_2$ existuje prvok $u \in M_1$ tak, že $Au=v$.

V ďalšom sa predovšetkým sústreďíme na diferenciálne operátory. Existujú ale aj iné operátory:

Príklad 6.2: Príklad operátora, ktorý nie je diferenciálny je napríklad štvorcová matica n -tého stupňa, ktorá podľa predpisu $v = Au$ priradí každému vektoru $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ z lineárneho priestoru všetkých n -rozmerných vektorov vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ z toho istého lineárneho priestoru. Ak je matica regulárna, je týmto vzťahom dané zobrazenie na.

Príklad 6.3.: Definičným oborom operátora Δ z príkladu 6.1 je lineárny priestor M_1 funkcií z $C^2(\overline{G})$ nulových na hranici G . Operátor zobrazuje M_1 do priestoru všetkých spojitých funkcií v $\overline{G}$. Zatiaľ nevieme odpovedať na otázku, či je to zobrazenie na. Vieme len, že tento problém je ekvivalentný úlohe či existuje riešenie problému (6.2), (6.3) pre každú spojitú pravú stranu $f \in M_2$.

Definícia 6.3.: O dvoch operátoroch A a B hovoríme, že **sa rovnajú** a zapisujeme $A=B$ ak sa rovnajú ich definičné obory a zároveň ak $Au=Bu$ (táto rovnosť sa chápe v zmysle definície rovnosti prvkov v obore hodnôt) pre všetky u z definičného oboru.

Príklad 6.4. Vezmeme operátor a definičný obor tohto operátora ako je v príklade 6.1., označme ho A . Zrejme môžeme definovať ten istý operátor, označme ho B , len pre funkcie z $C^2(\overline{G})$. Potom tento nový operátor sa nerovná operátoru A , pretože sa nerovnajú ich definičné obory. V tomto prípade platí $M_1 \subset C^2(\overline{G})$ a táto inklúzia je ostrá. Zároveň pre každé $u \in M_1$ platí $Au=Bu=\Delta u$. V takomto prípade hovoríme že operátor B je **rozšírením** operátora A .

Definícia 6.4: Majme operátory A a B s definičnými obormi D_A resp. D_B . Ak platí: $D_A \subset D_B$, $D_A \neq D_B$ a zároveň $Au=Bu$ pre každé $u \in D_A$, hovoríme, že **B je rozšírením operátora A** .

Definícia 6.5: Nech sú dané dva operátory A a B s definičnými obormi D_A resp. D_B . **Súčet operátorov** je definovaný vzťahom

$$(6.5) \quad (A+B)u = Au + Bu \text{ a definičným oborom tohto operátora je } D_A \cap D_B.$$

Súčin operátorov je definovaný vzťahom

$$(6.6) \quad (AB)u = A(Bu) \text{ a definičným oborom tohto operátora je } D_{AB} \text{ množina tých}$$

prvkov u z D_B , pre ktoré je $Bu \in D_A$.

Poznámka 6.2: Vo všeobecnosti je $AB \neq BA$. Príkladom je súčin matíc.

Definícia 6.6.: Ak platí $BA=AB$, tieto operátory nazývame navzájom **komutatívne**.

Definícia 6.7.: Operátor A sa nazýva **prostý** na svojom definičnom obore D_A

ak pre každé dva prvky $u_1 \neq u_2$ z D_A je $Au_1 \neq Au_2$. (Injektívny operátor, injekcia)

Definícia 6.8.: Nech operátor A zobrazuje množinu M_1 na množinu M_2 a nech je prostý.

(surjekcia + injekcia = bijekcia, bijektívny operátor). Operátor B , ktorý priradí prvku $v \in M_2$ práve ten prvok $u \in M_1$, pre ktorý platí $Au=v$, sa nazýva **inverzný operátor** k operátoru A a označuje A^{-1} .

Tvrdenie 6.1: Pre všetky $u \in M_1$ a pre všetky $v \in M_2$ platí:

$$(6.7) \quad A^{-1}Au = u, \quad AA^{-1}v = v$$

Príklad 6.4.: Operátor z príkladu 6.1. je prostý a na lineárny podpriestor N .

Definícia 6.9: Operátor A sa nazýva **lineárny**, ak je jeho definičným oborom lineárny priestor D_A a platí: pre ľubovoľné prvky $u_1, u_2, \dots, u_n$ z D_A a pre ľubovoľné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$(6.8) \quad A(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) = a_1Au_1 + a_2Au_2 + \dots + a_nAu_n$$

Ekvivalentná forma definície: Operátor A sa nazýva lineárny ak je jeho definičným oborom lineárny priestor D_A a platí:

$$(6.9) \quad A(au) = aAu, \quad \forall u \in D_A, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(6.10) \quad A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2, \quad \forall u_1, u_2 \in D_A$$

Príklad 6.5.: Operátor daný na lineárnom priestore $C^1(a, b)$ daný predpisom $Au = \frac{du}{dx}$ je lineárny operátor.

Tvrdenie 6.2.:

Nech A je lineárny operátor. Potom

- a) jeho obor hodnôt R_A je lineárny priestor,
- b) nulový prvok z D_A sa zobrazí na nulový prvok v R_A ,
- c) ak existuje jeho inverzný operátor A^{-1} , tak je tiež lineárny

Veta 6.1: Nech A je lineárny operátor s definičným oborom D_A a oborom hodnôt R_A . Potom k tomuto operátoru existuje inverzný operátor A^{-1} práve vtedy ak platí

$$(6.11) \quad Au = 0 \quad \forall u \in R_A \Rightarrow u = 0 \quad \forall u \in D_A.$$

Poznámka 6.3: Splnenie vzťahu (6.11) stačí na existenciu inverzného operátora, čo oproti dôkazu bijekcie všeobecného operátora značne zjednodušuje situáciu pri lineárnych operátoroch.

Lineárne operátory v Hilbertovom priestore hrajú v matematike významnú úlohu. Existujú však aj iné operátory, tiež veľmi dôležité, ktoré nemusia byť vo všeobecnosti lineárne. Uvedieme jeden dôležitý príklad.

Definícia 6.10.: Nech P je metrický priestor s metrikou ρ . Nech operátor A zobrazuje prvky tohto priestoru P opäť do priestoru P . Operátor A sa nazýva **kontraktívny v tomto priestore** ak existuje také číslo α , $0 < \alpha < 1$, že pre každú dvojicu prvkov x, y z P platí: $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$.

Veta 6.2.: Banachova veta o pevnom bode. Nech je A kontraktívny operátor v úplnom metrickom priestore P . Potom rovnica

$$x = Ax$$

má v priestore P práve jedno riešenie, to znamená, že existuje práve jeden prvok u z P , pre ktorý platí $u = Au$. Tento prvok možno získať ako limitu postupnosti prvkov x_n z P , $u = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, kde

$$x_{n+1} = Ax_n, n = 1, 2, \dots,$$

pričom prvok x_1 možno zvoliť ľubovoľne.

Poznámka 6.4: Veta má veľmi dôležité miesto napríklad v numerických metódach, ale aj v lineárnej algebre pri riešení sústav lineárnych rovníc.

Ďalej sa budeme zaoberať operátormi definovanými na Hilbertovom priestore H , teda na priestore s metrikou a normou indukovanou skalárnym súčinom.

Definícia 6.11.: Operátor I sa nazýva **jednotkový operátor**, ak priradzuje každému prvku $u \in D_I$ ten istý prvok. Operátor O nazývame **nulový operátor**, ak priradzuje každému prvku $u \in D_O$ nulový prvok priestoru H .

Pre jednotkový operátor teda platí: $Iu = u, \forall u \in D_I$

Pre nulový operátor platí: $Ou = 0, \forall u \in D_O$

Definícia 6.12.: Operátor A sa nazýva **spojitý v bode u_0** z D_A ak pre každú postupnosť prvkov $u_n \in D_A$, pre ktorú platí $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 \in H$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = Au_0 \in H. \text{ (teda } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - Au_0\| = 0 \text{)}.$$

Ak je operátor A spojitý v každom bode svojho definičného oboru D_A , hovoríme, že je spojitý v D_A .

Definícia 6.13.: Operátor A sa nazýva **ohraničený** na svojom definičnom obore D_A , ak sa dá nájsť číslo $K \geq 0$ také, že pre všetky $u \in D_A$ platí

$$(6.12) \quad \|Au\| \leq K\|u\|$$

Najmenšie z čísel K (dá sa ukázať, že vždy existuje), pre ktoré platí vzťah (6.12) nazývame **normou** operátora A a označujeme ho $\|A\|$.

Preto platí

$$(6.13) \quad \|Au\| \leq \|A\| \|u\| \quad \text{pre každé } u \in D_A.$$

Príklad 6.6: Nech je daná funkcia dvoch premenných $K(s,x)$ definovaná a s kvadrátom integrovateľná na štvorci $Q = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$. Označme ďalej $\int_0^1 \int_0^1 K^2(s,x) dx ds = C^2$, C

kladné.

V Hilbertovom priestore $L_2(0,1)$ nech je daný operátor A predpisom

$$(6.14) \quad Au = v = \int_0^1 K(s,x)u(x)dx.$$

Tento integrál za daných predpokladov existuje a navyše funkcia v , ako funkcia premennej s je z priestoru $L_2(0,1)$. Navyše podľa Schwarzovej nerovnosti:

$$v^2 = \left(\int_0^1 K(s,x)u(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 K^2(s,x)dx \cdot \int_0^1 u^2(x)dx \quad \text{a teda}$$

$$\int_0^1 v^2(s)ds \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 K^2(s,x)dx \cdot \int_0^1 u^2(x)dx \right) ds = \int_0^1 \int_0^1 K^2(s,x)dx \cdot ds \cdot \int_0^1 u^2(x)dx$$

a z toho

$$\|v\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C^2 \|u\|_{L_2(0,1)}^2 \Rightarrow \|Au\|_{L_2(0,1)} \leq C \|u\|_{L_2(0,1)}.$$

Operátor (6.14) je teda v Hilbertovom priestore $L_2(0,1)$ ohraničený. Pre normu A platí $\|A\| \leq C$.

Príklad 6.7: V Hilbertovom priestore $L_2(0,1)$ uvažujme lineál $D_A = C^1(0,1)$ a na ňom definujeme operátor A predpisom

$$Au = \frac{du}{dx}. \quad \text{Tento operátor nie je na } D_A \text{ ohraničený. Stačí ukázať, že neexistuje taká}$$

konštanta K , aby platilo $\|Au\|_{L_2(0,1)} \leq K \|u\|_{L_2(0,1)} \quad \forall u \in D_A$. Ukážeme to sporom.

Veta 6.3: Nech je A lineárny operátor v Hilbertovom priestore H , ktorý zobrazuje lineál $D_A \subset H$ do H . Ak je operátor na D_A ohraničený, potom je spojitý.

Veta 6.4.: Nech je A lineárny operátor v Hilbertovom priestore H , ktorý zobrazuje lineál $D_A \subset H$ do H spojitý v D_A , potom je ohraničený.
(Bez dôkazu)

Symetrické, pozitívne a pozitívne definitné operátory.

Označenia: Už v predchádzajúcom texte sme používali označenie

$C^k(\overline{G})$ - lineárny priestor spojitých až do k -teho rádu reálnych funkcií na $\overline{G}$.

$C^\infty(\overline{G})$ - lineárny priestor spojitých spolu so všetkými deriváciami reálnych funkcií na $\overline{G}$.

$C_0^\infty(G)$ - lineárny priestor tých funkcií z $C^\infty(\overline{G})$, ktoré sú rovné nule v určitom okolí hranice oblasti G . Často sa označujú aj ako $\mathcal{D}(G)$ a sú známe pod menom **funkcie s kompaktným nosičom v G** .

Nosičom funkcie $\varphi(x)$, označujeme $\text{supp } \varphi$ rozumieme uzáver (v priestore E_N) množiny tých bodov $x \in \overline{G}$ pre ktoré platí $\varphi(x) \neq 0$.

Teda $\varphi \in C_0^\infty(G)$ znamená, že $\varphi \in C^\infty(\overline{G})$ a $\text{supp } \varphi \subset G$.

Príklad 6.8: V jednodimenziálnom prípade je funkcia s kompaktným nosičom v intervale $(-3,3)$ napríklad

$$u(x) = \begin{cases} e^{-1/(4-x^2)}, & x \in (-2,2) \\ 0, & \text{inde} \end{cases}$$

Má spojité derivácie všetkých rádov a má kompaktný nosič.

Všeobecnejšie: Uvažujeme funkciu $\psi(\rho, x, t)$ definovanú predpisom

$$\psi(\rho, x, t) = \begin{cases} e^{-1/(\rho^2 - (x-t)^2)}, & |x-t| < \rho \\ 0, & |x-t| \geq \rho \end{cases}$$

kde ρ je pevne dané číslo. Dá sa ukázať, že pre každé reálne číslo x má uvedená funkcia ako funkcia premennej t všetky derivácie a je nenulová len v intervale $(x-\rho, x+\rho)$.

Navyše:

$$(6.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\rho, x, t) dt = \int_{x-\rho}^{x+\rho} e^{-1/(\rho^2 - (x-t)^2)} dt = \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-1/(\rho^2 - z^2)} dz = h(\rho), \text{ a tento integrál nezávisí}$$

od premennej x .

Vezmeme $\varphi(\rho, x, t) = \frac{\psi(\rho, x, t)}{h(\rho)}$ je teda taká, že $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\rho, x, t) dt = 1$, a nazýva sa

regularizujúce jadro.

Uvažujme ľubovoľnú funkciu $u \in L_2(a, b)$ a predĺžme ju nulou na celý interval $(-\infty, \infty)$.

Uvažujme integrál

$$\mu(\rho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \varphi(\rho, x, t) dt, \text{ kde } \rho \text{ je kladné číslo.}$$

Z predchádzajúceho je zrejmé, že funkcia $\mu(\rho, x)$ bude nulová pre všetky x mimo intervalu $(a-\rho, b+\rho)$. Z hladkosti funkcie φ plynie aj hladkosť funkcie μ a ak bude ρ dostatočne malé, bude sa na intervale (a, b) funkcia μ len málo líšiť od funkcie u .

Veta 6.5.: Funkcia $\mu(\rho, x)$ má v intervale $(-\infty, \infty)$ derivácie všetkých rádov pričom mimo intervalu $(a-\rho, b+\rho)$ je táto funkcia nulová. Navyše platí:

$$(6.16) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu(\rho, x) = u(x) \quad \forall \quad L_2(a, b)$$

Bez dôkazu –literatúra.

Tvrdenie 6.3: Nech $u \in L_2(a, b)$. Potom ku každému $\eta > 0$ sa dá nájsť také $\delta > 0$, že platí:

$$(6.17) \quad \int_c^d u^2(x) dx < \eta, \quad \text{pre} \quad c, d \in (a, b), \quad |d - c| \leq \delta$$

Bez dôkazu –literatúra

Veta 6.6: Lineárny priestor $C_0^\infty(a, b)$ je hustý v $L_2(a, b)$.

Veta 6.7: Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom lineárny priestor $C_0^\infty(G)$ je hustý v $L_2(G)$.

Poznámka 6.5: Z uvedeného vyplýva, že každú funkciu $f \in L_2(a, b)$ môžeme s ľubovoľnou presnosťou aproximovať funkciami z lineárneho priestoru $C_0^\infty(a, b)$, ale tým skôr funkciami z lineárneho priestoru N , ktorý tvoria všetky funkcie spojitě až do druhého rádu vrátane na intervale $\langle a, b \rangle$ a spĺňajú podmienky $u(a) = u(b) = 0$,

pretože tento určite obsahuje všetky funkcie z $C_0^\infty(a, b)$. (je „väčší“). Toto platí aj pre lineárny priestor P , takých funkcií z lineárneho priestoru N , ktoré spĺňajú oveľa všeobecnejšie okrajové podmienky:

$$c_1 u'(a) + c_2 u(a) = 0, \quad c_3 u'(b) + c_4 u(b) = 0, \quad \text{kde aspoň jedno číslo v každej z dvojíc}$$

$(c_1, c_2), (c_3, c_4)$ je nenulové.

Poznámka 6.6: Analogický výsledok platí aj pre viacdimenzionálny prípad. Napríklad priestor M_1 z príkladu 6.1 je tiež hustý v $L_2(G)$, pretože obsahuje všetky funkcie z $C_0^\infty(G)$. To isté platí aj pre lineárny priestor R takých funkcií z $C^2(\bar{G})$, ktoré na hranici

spĺňajú podmienku $\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = 0$, kde ν je vektor vonkajšej normály k hranici $\Gamma = \partial G$, c je

buď konštanta (aj nulová) alebo funkcia daná na hranici Γ .

Poznámka 6.7.: Na uvažované funkcie možno klásť aj iné požiadavky. Napríklad aj lineárny priestor funkcií s kompaktným nosičom v intervale (a, b) takých, že

$$\int_a^b u(x) dx = 0 \quad \text{je hustý v priestore } \tilde{L}_2(a, b) \quad (\text{v metrike } L_2(a, b)) \quad \text{tých funkcií } f \in L_2(a, b)$$

, ktoré vyhovujú podmienke $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Veta 6.8: Greenova veta. Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou a nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú spojité včítane všetkých svojich prvých parciálnych derivácií v $\overline{G} = \Gamma \cup G$.

Potom platí: $\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_\Gamma f g v_i ds - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx$, kde v_i je i -ta zložka vektora vonkajšej normály ku hranici.

Definícia 6.14.: Nech D_A je lineárny priestor hustý v H . Operátor A lineárny v D_A sa nazýva **symetrický**, ak pre každú dvojicu prvkov $u, v \in D_A$ platí:

$$(6.18) \quad (Au, v) = (u, Av).$$

Príklad 6.9: Označme D_A lineárny priestor N z poznámky 6.5. Z už povedaného je tento lineárny priestor hustý v **Hilbertovom priestore** $L_2(a, b)$. Na tomto lineárnom priestore definujeme operátor A vzťahom: $Au = -u''$. Tento operátor je symetrický.

Definícia 6.15.: Operátor A sa nazýva **pozitívny** na svojom definičnom obore D_A , ak je symetrický a pre všetky $u \in D_A$ platí:

$$(6.19) \quad (Au, u) \geq 0, \text{ ak } (Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \forall u \in D_A$$

Ak navyše existuje konštantná $C > 0$, taká, že pre všetky $u \in D_A$ platí

$$(6.20) \quad (Au, u) \geq C^2 \|u\|^2,$$

nazýva sa operátor **pozitívne definitný** v D_A .

Príklad 6.10: Operátor z príkladu 6.9 je pozitívny.

Príklad 6.11: Operátor z príkladu 6.9 je pozitívne definitný.

Cvičenia:

6.1.: Ukážte, že rozšírenie operátora z príkladu 6.9 na definičný obor $C^2(a, b)$ nie je symetrický operátor.

6.2. Definujme na Hilbertovom priestore $L_2(G)$ lineárny priestor D_A ako množinu všetkých funkcií z $C^2(\overline{G})$, kde G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou takých, že na hranici spĺňajú nulovú Dirichletovu podmienku. Ukážte, že operátor $Au = -\Delta u$, (Δu je Laplaceov operátor) s týmto definičným oborom je symetrický operátor.

6.3.: Ukážte, že operátor z príkladu 6.2 je pozitívny.

7. Funkcionály v Hilbertovom priestore. Rieszova veta

Definícia 7.1.: Operátor F , ktorý zobrazuje svoj definičný obor D_F do množiny reálnych (resp. komplexných) čísel sa nazýva **funkcionál** (reálny, resp. komplexný). Budeme skúmať hlavne reálne funkcionály. Funkcionál je špeciálnym prípadom operátora a preto výsledky predchádzajúcej kapitoly platia v nezmenenej podobe aj pre funkcionály.

Definícia 7.2.: Reálny funkcionál F sa nazýva Lineárny, ak je jeho definičným oborom D_F lineárny priestor a pre každé reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a každé prvky $u_1, u_2, \dots, u_n$ z D_F platí

$$(7.1) \quad F(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = a_1 F u_1 + a_2 F u_2 + \dots + a_n F u_n$$

Definícia spojitosti a ohraničenosti sú tiež podobné. Treba si len uvedomiť, že konvergencia $\lim_{n \rightarrow \infty} F u_n = F u$ znamená v tomto prípade konvergenciu postupnosti reálnych čísel.

Definícia 7.3.: Funkcionál F sa nazýva **spojitý v bode u_0** z D_F ak pre každú postupnosť prvkov $u_n \in D_F$, pre ktorú platí $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 \in H$ platí

$$(7.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F u_n = F u_0.$$

Ak je funkcionál F spojitý v každom bode svojho definičného oboru D_F , hovoríme, že je **spojitý** v D_F .

Definícia 7.4.: Funkcionál F sa nazýva **ohraničený** na svojom definičnom obore D_F , ak sa dá nájsť číslo $K \geq 0$ také, že pre všetky $u \in D_F$ platí

$$(7.3) \quad |F u| \leq K \|u\|.$$

Najmenšie z čísel K (vždy existuje), pre ktoré platí vzťah (7.3) nazývame **normou funkcionálu F** a označujeme $\|F\|$.

Príklad 7.1.: Nech v je určitý pevný prvok reálneho Hilbertovho priestoru H . Definujme

$$(7.4) \quad F u = (u, v), \quad \forall u \in H.$$

Vzťahom (7.4) je v H daný lineárny ohraničený funkcionál a jeho norma je rovná norme prvku v .

Veta 7.1: Rieszova veta. Každý lineárny ohraničený funkcionál F v Hilbertovom priestore H sa dá vyjadriť v tvare

$$(7.5) \quad F u = (u, v),$$

kde v je určitý prvok priestoru H , ktorý je týmto funkcionálom určený. Pritom platí:

$$(7.6) \quad \|v\| = \|F\|.$$

Veta 7.2.: Lineárny funkcionál je v D_F spojitý práve vtedy, keď je ohraničený.

Poznámka 7.1.: Nech A je pozitívny operátor v lineárnom priestore D_A , hustom v Hilbertovom priestore H . Nech f je prvok z H . Potom predpisom

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u)$$

je daný funkcionál a nazývame ho **kvadratický** funkcionál, pretože

$$(A(au), au) = a^2 (Au, u), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Cvičenia

7.1.: Pre Hilbertov priestor $L_2(0,1)$ definujte pre funkciu $v(x)=1$ na intervale $<0,1>$ funkcionál G ako v príklade 7.1. Ukážte jeho základné vlastnosti.