

1. Úvodné pojmy

Označenia

G – N -rozmerná oblasť: otvorená súvislá množina euklidovského podpriestoru E_N .

ohraničená oblasť s Lipschitzovskou hranicou

$\Gamma, \partial G$ – hranica oblasti

$\overline{G}$ – uzáver oblasti: $\overline{G} = G \cup \Gamma$ – uzavretá oblasť

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ – súradnice bodov v E_N

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ – bod v E_N .

Viacrozmerné integrály: $\iiint_G \dots \int_G u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \int_G u(x) dx$

Funkcie definované na oblasti G – reálne funkcie

Skalárny súčin funkcií, norma, metrika

Definícia 1.1:

Množinu M , ktorej prvky sú funkcie definované na oblasti G , nazývame **lineárnym priestorom** (lineálom, lineárnou množinou), práve vtedy, ak pre ľubovoľné dve funkcie $u(x), v(x)$ z M a pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí, že aj ich lineárna kombinácia, to jest funkcia $au(x) + bv(x)$ patrí do množiny M .

Príklad 1.1: Označme L množinu všetkých spojitých funkcií definovaných na uzavretej oblasti $\overline{G}$ s obvyklou definíciou súčtu dvoch funkcií a násobenia funkcie konštantou.

Potom L je lineárny priestor.

Definícia 1.2:

Skalárnym súčinom funkcií $u(x), v(x)$ definovaných na G z lineárneho priestoru L rozumieme integrál

$$(1.1) \quad \int_G u(x)v(x)dx$$

a označujeme ho: (u, v) .

Veta 1.1:

Pre takto definovaný skalárny súčin platí:

Nech sú $u(x), v(x), u_1(x), u_2(x)$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru L a a_1, a_2 sú ľubovoľné reálne čísla. Pre skalárny súčin definovaný vzťahom (2.1) platí:

$$(1.2) \quad (u, v) = (v, u),$$

$$(1.3) \quad (a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v),$$

$$(1.4) \quad (u, u) \geq 0,$$

$$(1.5) \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad \forall \quad G$$

Vzťah (1.2) vyjadruje **symetriu**, vzťah (1.3) **homogénnosť** a **aditivitu** skalárneho súčinu.

Dôsledok 1.1:

Nech sú $u(x), v_1(x), v_2(x)$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru L a a_1, a_2 sú ľubovoľné reálne čísla. Potom pre skalárny súčin definovaný vzťahom (2.1) platí:

$$(1.6) \quad (u, a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 (u, v_1) + a_2 (u, v_2)$$

Definícia 1.3:

Nech je daná funkcia $u(x)$ z lineárneho priestoru L . Normou funkcie $u(x)$ rozumieme číslo

$$(1.7) \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_G u(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

Veta 1.2:

Nech sú $u(x), v(x)$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru L a a je ľubovoľné reálne číslo. Pre normu definovanú vzťahom (1.7) platí:

$$(1.9) \quad \|u\| \geq 0,$$

$$(1.10) \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad \forall \quad G,$$

$$(1.11) \quad \|au\| = |a| \cdot \|u\|,$$

$$(1.12) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

$$(1.13) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

$$(1.14) \quad \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$$

Vzťah (1.13) nazývame **trojuholníková nerovnosť**, vzťah (1.12) **Cauchy-Schwarzova nerovnosť**

Definícia 1.4:

Nech sú dané funkcie $u(x), v(x)$ z lineárneho priestoru L .

Vzdialenosťou (metrikou) funkcií $u(x), v(x)$ rozumieme číslo

$$(1.15) \quad \rho(u, v) = \|u - v\|$$

Veta 1.3:

Nech sú $u(x), v(x), z(x)$ ľubovoľné funkcie definované na oblasti G z lineárneho priestoru L . Pre metriku definovanú vzťahom (1.15) platí:

$$(1.16) \quad \rho(u, v) \geq 0,$$

$$(1.17) \quad \rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x) \quad \forall x \in G,$$

$$(1.18) \quad \rho(u, v) = \rho(v, u),$$

$$(1.19) \quad \rho(u, z) \leq \rho(u, v) + \rho(v, z)$$

Definícia 1.5:

Množinu M , nazývame **metrickým priestorom** práve vtedy, ak pre ľubovoľnú dvojicu jej prvkov u, v z M je definované číslo $\rho(u, v)$, tzv. **metrika** alebo **vzdialenosť** dvoch prvkov, ktorá má vlastnosti (1.16) – (1.19).

Poznámka 1.1: Vyššie uvedená definícia je všeobecnejšia a platí pre ľubovoľné množiny M , to jest ich prvky nemusia byť funkcie.

Naviac ani metrika či norma nemusí byť definovaná len takým spôsobom, ako sme uviedli vo vzťahu (1.15). Na priestore reálnych funkcií definovaných na oblasti G existujú aj iné metriky napríklad definujeme normu nasledovne:

$$(1.20) \quad \|u\|_C = \max_{x \in G} |u(x)| \text{ a následne z nej odvodená metrika bude potom}$$

$$(1.21) \quad \rho_C(u, v) = \max_{x \in G} |u(x) - v(x)|$$

Priestor s takto definovanou metrikou bude potom iný metrický priestor. Spravidla ho označujeme $C(G)$.

Poznámka 1.2: Ak sú funkcie „blízke“ vo všetkých bodoch oblasti $\overline{G}$, to jest ak platí:

$$(1.22) \quad |u(x) - v(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \overline{G},$$

potom aj ich metrika v priestore $C(G)$, to jest vzdialenosť medzi nimi je malá: $\rho_C(u, v) \leq \varepsilon$. a Platí to aj opačne: ak je metrika malá aj vzdialenosť medzi funkciami v každom bode je malá.

Iná je situácia pre metriku odvodenú z normy (1.7). Ak je rozdiel funkcií malý, je aj metrika malá: Ak platí (1.22), potom

$$\rho(u, v) = \left(\int_G (u(x) - v(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_G (\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} = \varepsilon \sqrt{P}, \text{ kde } P \text{ je obsah (objem)}$$

oblasti G . Opačné tvrdenie neplatí.

Príklad 1.2:

Nech sú dané funkcie

$$u(x) = \begin{cases} 10 \sin 100\pi x & 0 \leq x \leq 0,001 \\ 0 & 0,001 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
$$v(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Pre tieto funkcie je $\rho(u, v) = \left(\int_0^1 (u(x) - v(x))^2 dx \right)^{1/2} \approx 0.224$. Ako vidno metrika má malú hodnotu, ale vzdialenosť týchto funkcií napr. v bode $x = 0,0005$ je veľká v porovnaní s metrikou (rovná sa 10).

Budeme tým chápať funkcie, ktorých vzdialenosť je malá, teda platí $\rho(u, v) \leq \varepsilon$, pre vhodne zvolené kladné reálne číslo ε a nejakú konkrétnu metriku.

Cvičenia:

Lineárne priestory

1.1. Označme L množinu všetkých spojitých funkcií definovaných na oblasti $\overline{G}$ s obvyklou definíciou súčtu dvoch funkcií a násobenia funkcie konštantou. Ukážte, že L je lineárny priestor.

1.2. Vyberme z množiny L z príkladu 1.1. množinu všetkých takých funkcií, pre ktoré platí: $|u(x)| \leq 7, \quad x \in G$. Označme túto novú množinu L . Ukážte, že množina L nie je lineárny priestor.

Príklady iných ako funkcionálnych lineárnych priestorov:

1.3. Euklidovské n -rozmerné priestory, $n=1,2,3,\dots,k$

1.4. Ukážte, že množina všetkých konvergentných postupností reálnych čísel s obvyklou definíciou súčtu postupností a násobenia reálnym číslom je lineárny priestor.

1.5. Ukážte, že množina všetkých ohraničených postupností reálnych čísel s obvyklou definíciou súčtu postupností a násobenia reálnym číslom je lineárny priestor. Je to lineárny podpriestor lineárneho priestoru z vyššie uvedeného príkladu.

Skalárny súčin, norma

1.6. Nech oblasť $\overline{G}$ je štvorec s hranou 1 a ľavým spodným vrcholom v počiatku súradnicovej sústavy. Majme dve funkcie $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 2$. Vypočítajte skalárny súčin z týchto funkcií v zmysle definície (1.1).

1.7. Uvažujme na intervale $< 0, \pi >$ funkcie $u = \cos x$, $v = \sin x$. Nájdite ich normu v zmysle definície (1.7). Na tomto konkrétnom prípade overte platnosť vzťahu (1.12).

1.8. Pre funkcie z príkladu 1.6. nájdite hodnotu normy týchto funkcií v zmysle definície (1.20).

Metrika

1.9. Pre funkcie z príkladu 1.6. nájdite hodnotu metriky odvodennej z normy (1.7) a potom aj z normy (1.20).

1.10. Majme lineárny priestor L . Definujme

$$\rho(f, g) = \begin{cases} 1, & \text{ak } f = g \\ 0, & \text{ak } f \neq g \end{cases}$$

Ukážte, že dané zobrazenie má vlastnosti metriky.

1.11. Na lineárnom priestore z príkladu 1.5. s prvkami $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ definujme zobrazenie:

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|. \text{ Ukážte, že je to metrika na tomto priestore.}$$

2. Priestor L_2

Úvodné pojmy

Definícia 2.1:

Hovoríme, že reálne funkcia $u(x)$ je integrovateľná v oblasti G s druhou mocninou (kvadrátom), ak existujú a sú konečné integrály $\int_G u(x)dx$ a $\int_G u^2(x)dx$.

Príklad 2.1: Každá funkcia spojitá alebo po častiach spojitá v uzavretej oblasti $\bar{G}$ je integrovateľná s kvadrátom.

Poznámka 2.1: Integrály v predchádzajúcej definícii chápeme v Lebesgueovom zmysle.

Tvrdenie 2.1: Reálne funkcie integrovateľné v oblasti G s druhou mocninou tvoria lineárny priestor.

Definícia 2.2:

Pre reálne funkcie $u(x), v(x)$ integrovateľné v oblasti G s druhou mocninou môžeme definovať podobne ako v predchádzajúcej kapitole skalárny súčin, normu aj metriku.

$$(2.1) \quad (u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$$

$$(2.2) \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_G u(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

$$(2.3) \quad \rho(u, v) = \|u - v\| = \left(\int_G (u(x) - v(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

Definícia 2.3:

Lineárny priestor funkcií integrovateľných v oblasti G s druhou mocninou s metrikou (2.3) nazývame **metrický priestor** $L_2(G)$.

Poznámka 2.2.: Ak je funkcia spojitá v $\overline{G}$, potom zo vzťahu $\int_G u^2(x)dx = 0$ platí, že $u(x) = 0$ v G . Ak ale platí $u(x) \in L_2(G)$, potom z uvedeného vzťahu sa nedá usúdiť, že $u(x) = 0$. Napríklad funkcia všade nulová, len v jednom bode nenulová. Dokonca to platí aj pre funkciu, ktorá má nenulových bodov spočítateľne veľa. V týchto dokonca funkcia nemusí byť definovaná. To isté platí aj pre funkciu, ktorá má počet takýchto bodov množiny Lebesgueovej miery nula.

Definícia 2.4: Nech sú reálne funkcie $u(x), v(x)$ integrovateľné v oblasti G s druhou mocninou a v oblasti G sa rovnajú **skoro všade**, to jest líšia sa len na oblasti s Lebesgueovou mierou nula. Hovoríme, že v priestore $L_2(G)$ sú tieto funkcie **ekvivalentné**. Píšeme $u=v$.

V tomto priestore to budú sebe rovné funkcie. Takéto funkcie sú charakterizované vlastnosťou

$$(2.4) \quad \int_G (u(x) - v(x))^2 dx = 0.$$

Funkcie ktoré nie sú ekvivalentné sú charakterizované vlastnosťou

$$(2.5) \quad \int_G (u(x) - v(x))^2 dx \neq 0.$$

Medzi ekvivalentnými funkciami je jediná spojitá v G .

Ak napríklad vezmeme funkcie ekvivalentné s nulovou funkciou, je len jediná funkcia spojitá a všade identicky rovná nule.

Takže ak napíšeme, že zo vzťahu $\int_G u^2(x)dx = 0$ plynie $u = 0$ v $L_2(G)$, znamená

to, že funkcia u je v tomto priestore ekvivalentná nulovej funkcii (je identicky rovná nule až na množinu miery nula).

Veta 2.1: Nech sú $u(x), v(x), z(x), u_1(x), u_2(x)$ ľubovoľné funkcie z $L_2(G)$ a a, a_1, a_2 sú ľubovoľné reálne čísla. Pre skalárny súčin (2.1), normu (2.2) a vzdialenosť (2.3) platia vzťahy:

$$(2.6) \quad (u, v) = (v, u),$$

$$(2.7) \quad (a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v),$$

$$(2.8) \quad (u, u) \geq 0,$$

$$(2.9) \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad v \in G$$

$$(2.10) \quad \|u\| \geq 0,$$

$$(2.11) \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad v \in G,$$

$$(2.12) \quad \|au\| = |a| \cdot \|u\|,$$

$$(2.13) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

$$(2.14) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

$$(2.15) \quad \left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|$$

$$(2.16) \quad \rho(u, v) \geq 0,$$

$$(2.17) \quad \rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x) \quad v \in G,$$

$$(2.18) \quad \rho(u, v) = \rho(v, u),$$

$$(2.19) \quad \rho(u, z) \leq \rho(u, v) + \rho(v, z)$$

Nerovnosť (2.13) je v literatúre známa ako **Schwarzova (Holderova alebo Cauchy-Buňakovského nerovnosť)**.

V priestore $L_2(G)$ má tvar

$$(2.20) \quad \left| \int_G u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int_G u^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_G v^2(x)dx \right)^{1/2}$$

Cvičenia:

2.1. Ukážte, že funkcia $u(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ je funkcia na intervale $(0,1)$ integrovateľná a je aj integrovateľná s druhou mocninou.

2.2. Ukážte, že funkcia $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ nie je z priestoru $L_2(0,1)$.

3. Konvergencia v priestore L_2

Konvergencia

V ďalšom budeme skalárny súčin, normu a metriku v priestore $L_2(G)$ označovať :
 (u, v) , $\|u\|$, $\rho(u, v)$.

Definícia 3.1: Hovoríme, že postupnosť funkcií $u_n \in L_2(G)$ **konverguje v priestore** $L_2(G)$ k funkcii $u \in L_2(G)$, ak platí:

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0, \text{ teda } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_G (u_n(x) - u(x))^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

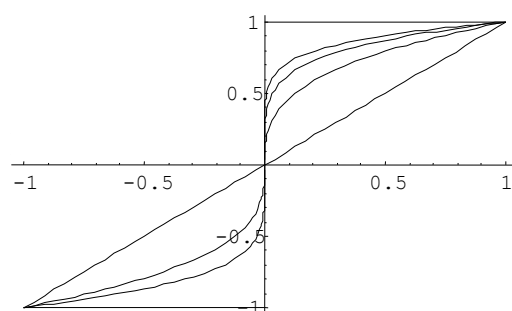
Zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad v \quad L_2(G)$. Stručne $u_n \rightarrow u \quad v \quad L_2(G)$.

Funkciu $u(x)$ nazývame limita postupnosti $\{u_n(x)\}$ v $L_2(G)$.

Príklad 3.1: Máme postupnosť funkcií $u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$ na intervale $(-1,1)$. Každá z nich je spojitá na intervale $(-1,1)$, teda sú z priestoru $L_2(-1,1)$. Ukážte že funkcia

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \\ 1 & \text{pre } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

je limitou uvedenej postupnosti v priestore $L_2(-1,1)$. Funkcia $u(x)$ nie je spojitá funkcia aj keď postupnosť k nej konvergujúca je postupnosť spojitých funkcií.



ť funkcií $u_n \in L_2(G)$ **konverguje v priestore**

$$\rho(u_n, u) < \varepsilon$$

Poznámka: v každom metrickom priestore môžeme vysloviť definíciu konverencie analogickú definícii v metrickom priestore $L_2(G)$.

Veta 3.1: Postupnosť funkcií $u_n \in L_2(G)$ môže mať v priestore $L_2(G)$ **najviac jednu limitu**.

Poznámka 3.1: Pozor, hovoríme o funkcii z priestoru $L_2(G)$, teda sa jedná o ekvivalenciu funkcií, ktoré sa líšia na množine miery nula. Preto aj funkcia

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{pre } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

je limitou postupnosti z predchádzajúceho príkladu.

Veta 3.2: Ak postupnosť funkcií $\{u_n(x)\}$ konverguje k funkcii $u(x)$ **rovnomerne**, potom **konverguje aj v priestore** $L_2(G)$ k tejto funkcii.

Cvičenia:

3.3. Dokážte vetu o existencii najviac jednej limity postupnosti.

3.4. Uvažujme na intervale $< 0,1 >$ postupnosť funkcií

$$u_n(x) = \begin{cases} 10 \sin 10^{2n+1} \pi x & 0 \leq x \leq 10^{-(2n+1)} \\ 0 & 10^{-(2n+1)} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ukážte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$ v $L_2(0,1)$. Uvedomte si, že napriek konvergencii v uvedenom priestore pre maximovú normu platí:

$$\max_{x \in <0,1>} |u_n(x) - u(x)| = 10, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ kde } u(x) = 0 \text{ v } L_2(0,1)$$

Úplnosť

Definícia 3.3: Postupnosť funkcií $u_n \in L_2(G)$ sa nazýva **cauchyovská (fundamentálna)** v priestore $L_2(G)$, ak platí:

$$(3.2) \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \rho(u_m, u_n) = 0$$

Poznámka 3.2: pojem cauchyovskej postupnosti platí v tejto podobe aj pre iné metrické priestory.

Definícia 3.4: Postupnosť funkcií u_n z metrického priestoru P s metrikou ρ_P sa nazýva **cauchyovská (fundamentálna)** v priestore P , ak platí:

$$(3.2) \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \rho_P(u_m, u_n) = 0$$

Veta 3.3: Každá postupnosť konvergentná v danom metrickom priestore P je v tomto priestore cauchyovská.

Poznámka 3.3: Opačné tvrdenie neplatí.

Definícia 3.5: Metrický priestor P sa nazýva **úplný** ak každá cauchyovská postupnosť je v ňom konvergentná. To jest ku každej cauchyovskej postupnosti u_n z tohto

metrického priestoru P sa dá nájsť prvok u , ležiaci v tomto priestore, ktorý je limitou tejto postupnosti.

Príklad 3.2: Euklidovský priestor so štandardnou metrikou je úplný priestor.
(Cauchyho - Bolzanovo kritérium).

Veta 3.4: Priestor $L_2(G)$ je úplný priestor.

Poznámka 3.4: Nie každý metrický priestor je úplný.

Hustota. Separabilita.

Definícia 3.6: Nech je $\delta > 0$ ľubovoľné kladné reálne číslo. δ -okolím funkcie $u(x)$ v priestore $L_2(G)$ rozumíme množinu všetkých funkcií $v \in L_2(G)$, pre ktoré platí
(3.3) $\rho(u, v) < \delta$.

Príklad 3.3: V priestore $L_2(0,1)$ ležia v δ -okolí nulovej funkcie zrejme napríklad všetky konštantné funkcie tvaru $v(x) = k$, $k < \delta$.

Definícia 3.7: Nech je M množina funkcií v priestore $L_2(G)$. Hovoríme, že funkcia $u \in L_2(G)$ je **hromadným bodom** tejto množiny M , ak v každom ľubovoľnom δ -okolí funkcie u leží nekonečne veľa funkcií z množiny M .

Veta 3.5: Funkcia u je v priestore $L_2(G)$ hromadným bodom množiny M práve vtedy, ak existuje postupnosť funkcií $u_n \in M$, ktorá konverguje v $L_2(G)$ k funkcii u .

Poznámka 3.5: Hromadný bod nemusí byť nutne prvkom množiny M .

Definícia 3.8: Množina $\overline{M}$, ktorá vznikne zjednotením množiny M a všetkých jej hromadných bodov sa nazýva **uzáver** množiny M v priestore $L_2(G)$.
Ak platí $\overline{M} = M$, potom množinu M voláme **uzavretá**.

Definícia 3.9: Množina M sa nazýva **hustá v priestore** $L_2(G)$, ak každá funkcia z priestoru $L_2(G)$ je jej hromadným bodom, to jest $\overline{M} = L_2(G)$.

Definícia 3.10: Množina M sa nazýva hustá v priestore $L_2(G)$, ak ku každej funkcii u z priestoru $L_2(G)$ je možné nájsť postupnosť funkcií $u_n \in M$ konvergujúcich v $L_2(G)$ k funkcii u .

Poznámka 3.6: Z poslednej definície vyplýva, že funkcie u a u_n sú v metrike priestoru

$L_2(G)$ ľubovoľne blízko, ak je n dostatočne veľké. Množina M hustá v priestore $L_2(G)$ práve vtedy, keď každú funkciu z $L_2(G)$ možno s ľubovoľnou presnosťou aproximovať v metrike tohto priestoru funkciami z množiny M .

Z Weierstrassovej vety je známe, že každú spojitú funkciu na uzavretom intervale $[a, b]$ možno s ľubovoľnou presnosťou aproximovať mnohočlenom, dokonca rovnomerne a teda tým skôr v priestore $L_2(a, b)$. Toto platí aj pre funkcie z $L_2(a, b)$.

Veta 3.6: Množina všetkých **mnohočlenov** je v priestore $L_2(G)$ hustá.

Veta 3.7: Lineárny priestor všetkých **spojitých** funkcií v uzavretej oblasti $\overline{G}$ je hustý v $L_2(G)$.

Definícia 3.11: M sa nazýva **spočítateľná** množina, ak jej prvky sa dajú zostaviť do postupnosti, to jest existuje vzájomne jednoznačné priradenie medzi danou množinou a množinou prirodzených čísel.

Definícia 3.12: Množina je **nanajvýš spočítateľná** ak je alebo spočítateľná alebo konečná.

Definícia 3.13: Metrický priestor je **separabilný** ak v ňom existuje nanajvýš spočítateľná množina hustá v tomto priestore.

Veta 3.8: Priestor $L_2(G)$ je separabilný.

Cvičenia:

3.5. Ukážte, že v priestore $L_2(0,1)$ v δ -okolí nulovej funkcie ležia funkcie tvaru $v(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, $|k| < \delta$.

3.6. Ukážte, že v priestore $L_2(0,1)$ v δ -okolí nulovej funkcie ležia aj funkcie z príkladu 3.4 pre dostatočne veľké n , (pre aké)?

3.7. Nech množinu M predstavujú všetky funkcie definované v príklade 3.4. pre $n=1,2,\dots$. Ukážte, že nulová funkcia je ich hromadným bodom.

3.8. Ukážte, že lineárny priestor všetkých spojitých funkcií na intervale $[-1,1]$ nie je uzavretá množina v priestore $L_2(-1,1)$.

Návod: Konvergenca postupnosti $u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$.

4. Ortogonálne systémy v priestore $L_2(G)$

Lineárna závislosť a nezávislosť v $L_2(G)$.

V ďalšom budeme pod funkciami u a v rozumieť funkcie z priestoru $L_2(G)$.

Definícia 4.1: Hovoríme, že funkcia u je v priestore $L_2(G)$ **lineárnou kombináciou** funkcií $v_1(x), v_2(x), \dots, v_r(x)$, z $L_2(G)$, ak sa dá v tomto priestore vyjadriť v tvare

(4.1) $u(x) = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + \dots + a_r v_r(x)$, kde $a_1, a_2, \dots, a_r$ sú vhodné reálne konštanty.

Definícia 4.2: O funkciách $v_1(x), v_2(x), \dots, v_k(x)$, z priestoru $L_2(G)$ hovoríme, že sú **lineárne závislé**, ak aspoň jednu z nich možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných $k-1$ funkcií. Ak sa ani jedna z týchto funkcií nedá vyjadriť ako lineárne kombinácia ostatných, hovoríme, že funkcie sú **lineárne nezávislé**. Stručne nazývame takýto systém funkcií lineárne závislý, alebo lineárne nezávislý.

Veta 4.1: Funkcie $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$, z priestoru $L_2(G)$ sú v ňom **lineárne závislé** práve vtedy ak existujú konštanty $b_1, b_2, \dots, b_k$, z ktorých **aspoň jedna je nenulová**, také že platí:

$$(4.2) \quad b_1 u_1(x) + b_2 u_2(x) + \dots + b_k u_k(x) = 0.$$

Funkcie $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$, sú **lineárne nezávislé** práve vtedy ak rovnosť (3.5) nastáva len v prípade, že sú **všetky** konštanty $b_1, b_2, \dots, b_k$ **nulové**.

Poznámka 4.1: Systém funkcií $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$, je z priestoru $L_2(G)$ a teda sú to funkcie integrovateľné s kvadrátom a rovnosť (4.2) sa chápe v zmysle tohto priestoru to jest ekvivalencie funkcií odlišných na množine miery nula.

Príklad 4.1: Funkcie $\sin^2 xy, \cos^2 xy, 4$ sú lineárne závislé v $L_2(G)$, kde G je ľubovoľná oblasť v rovine xy .

Kritérium lineárnej závislosti funkcií

Veta 4.2: Funkcie $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$, z $L_2(G)$ sú v priestore $L_2(G)$ **lineárne závislé** práve vtedy ak je tzv. Gramov determinant rovný nule:

$$(4.3) \quad D(u_1, u_2, \dots, u_k) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_k) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \dots & (u_2, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & (u_k, u_2) & \dots & (u_k, u_k) \end{vmatrix}$$

Veta 4.3: Funkcie $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$, z $L_2(G)$ sú v priestore $L_2(G)$ **lineárne nezávislé** práve vtedy ak je Gramov determinant rôzny od nuly.

Príklad 4.2: Funkcie $\sin x, \cos x, 1$ sú lineárne nezávislé v $L_2(0, \pi)$.

Ortogonalne a ortonormálne systémy v $L_2(G)$

Definícia 4.3: Dve funkcie $u \in L_2(G)$, $v \in L_2(G)$ sa nazývajú **ortogonálne** v priestore $L_2(G)$, ak je ich skalárny súčin rovný nule: $(u, v) = 0$. Zápis: $u \perp v$ v $L_2(G)$.

Definícia 4.4: Funkcia $u \in L_2(G)$, pre ktorú platí: $\|u\| = 1$ sa nazýva **normovaná** v priestore $L_2(G)$.

Definícia 4.5: Systém funkcií

$$(4.4) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots \in L_2(G), \quad i = 1, 2, \dots,$$

ktoré sú navzájom ortogonálne v $L_2(G)$ sa nazýva **ortogonálny systém**. Ak sú tieto funkcie navyše normované, hovoríme, že systém je **ortonormálny**.

Príklad 4.2: Systém funkcií $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \dots$ je ortonormálny v priestore $L_2(0, \pi)$.

Definícia 4.6: Systém funkcií $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots \in L_2(G)$, $i = 1, 2, \dots$ je **lineárne nezávislý**, ak každý systém vytvorený z konečného počtu týchto funkcií je lineárne nezávislý.

Poznámka 4.1: Ak vyberieme z ortonormálneho systému ľubovoľný konečný počet funkcií, tento bude lineárne nezávislý, pretože Gramov determinant bude rovný 1. Teda každý systém ortonormálny v $L_2(G)$ je v tomto priestore lineárne nezávislý.

Príklad 4.3: Nech je funkcia $u(x)$ daná ako lineárna kombinácia ortonormálneho systému. Vypočítajte jej normu.

Zavedli sme pojem konverencie postupnosti funkcií v priestore $L_2(G)$ pomocou metriky v ňom definovanej. Nech máme rad funkcií

$$(4.5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad u_k \in L_2(G), \quad k = 1, 2, \dots$$

Podobne ako je zvykom u funkcionálnych radov, zavedieme postupnosť čiastočných súčtov

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Definícia 4.7: Hovoríme, že **rad (4.5) konverguje** v priestore $L_2(G)$ a má súčet $s(x)$ ak postupnosť $\{s_n(x)\}$ jeho čiastočných súčtov konverguje v priestore $L_2(G)$ a má limitu $s(x)$.

Vynára sa otázka rozvinutia danej funkcie z priestoru $L_2(G)$ do ortonormálneho systému funkcií.

Veta 4.4: Ak je systém funkcií (4.4) ortonormálny v priestore $L_2(G)$ potom rad

$$(4.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad a_k \in \mathbb{R}, k=1,2,\dots$$

konverguje v priestore $L_2(G)$ práve vtedy, keď konverguje rad

$$(4.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Fourierove rady

Definícia 4.8: Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x) \in L_2(G)$. Potom čísla

$$(4.8) \quad \alpha_k = (u, \varphi_k) = \int_G u(x) \varphi_k(x) dx, \quad k=1,2,\dots$$

sa nazývajú **Fourierove koeficienty** funkcie u vzhľadom k systému (4.4) a rad

$$(4.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$$

sa nazýva **Fourierovým radom** funkcie u vzhľadom k systému (4.4).

Príklad 4.4: Nájdite Fourierove koeficienty pre ortonormálny systém

$$(4.10) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \dots$$

Veta 4.5: Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x) \in L_2(G)$. Nech n je ľubovoľné, ale pevné prirodzené číslo. Označme

$$(4.11) \quad u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x), \quad \text{kde } \alpha_k, k=1,2,\dots \text{ sú Fourierove koeficienty funkcie}$$

u vzhľadom k systému (4.4). Označme ďalej

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad \text{kde } a_k, k=1,2,\dots \text{ sú ľubovoľné reálne čísla.}$$

Potom platí

$\rho(u_n, u) \leq \rho(s_n, u)$, pričom ostrá nerovnosť nastáva akonáhle je aspoň jedno z čísel a_k rôzne od $\alpha_k, k=1,2,\dots, n$.

Veta 4.6: Pre každú funkciu u je rad štvorcov

(4.12) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ Fourierových koeficientov tejto funkcie vzhľadom k ľubovoľnému

ortonormálnemu systému z priestoru $L_2(G)$ konvergentný. Pritom platí:

$$(4.13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \|u\|^2. \quad (\text{Besselova nerovnosť})$$

Veta 4.7: Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x) \in L_2(G)$. Potom Fourierov rad prislúchajúci k tejto funkcii je konvergentný v priestore $L_2(G)$.

Veta 4.8: Nech je daný ortonormálny systém (4.4) a funkcia $u(x) \in L_2(G)$. Ak konverguje rad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x)$ v priestore $L_2(G)$ k funkcii u , potom sú $a_k, k = 1, 2, \dots$ nutne Fourierove koeficienty tejto funkcie vzhľadom k systému (4.4).

Poznámka 4.2: Opačná veta nemusí vo všeobecnosti platiť. Fourierov rad ľubovoľnej funkcie $u(x) \in L_2(G)$ je konvergentný, ale nemusí konvergovať práve k funkcii u .

Príklad 4.5: Uvažujme systém $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 5x, \dots$. Tento je zrejme v priestore $L_2(0, \pi)$ ortonormálny. Zostrojte Fourierov rad funkcie $u(x) = \sin 2x$ a ukážte k čomu konverguje.

Definícia 4.9: Ortonormálny systém funkcií (4.4) sa nazýva **úplný** v priestore $L_2(G)$, ak pre každú funkciu $u(x) \in L_2(G)$ konverguje v priestore $L_2(G)$ Fourierov rad k nej vytvorený práve k tejto funkcii.

Podmienka takejto konvergenzie vyplýva priamo z definície konvergenzie v priestore $L_2(G)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0$, kde v tomto prípade je u_n n -tý čiastkový súčet Fourierovho radu. Pre daný ortonormálny systém platí:

$$\begin{aligned} \rho^2(u_n, u) &= \|u_n - u\|^2 = \left(u - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, u - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\right) = (u, u) - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (u, \phi_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \\ &= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \end{aligned}$$

A teda $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2) = 0$, z čoho

$$(4.14) \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2.$$

Podmienka (3.16) vyjadruje nutnú a postačujúcu podmienku aby Fourierov rad funkcie $u(x) \in L_2(G)$ konvergoval v $L_2(G)$ k tejto funkcii a nazýva sa **Parsevalova rovnosť**.

Definícia 4.10: Ortonormálny systém funkcií (3.7) sa nazýva **uzavretý** v priestore $L_2(G)$, ak neexistuje žiadna funkcia $v(x) \in L_2(G)$ ortogonálna ku všetkým funkciám daného systému s výnimkou funkcie nulovej v $L_2(G)$.

Veta 4.9: Ortonormálny systém funkcií (3.7) v $L_2(G)$ je úplný práve vtedy, keď je uzavretý.

Príklad 4.6: Z uvedenej vety vyplýva, že systém z predchádzajúceho príkladu nie je úplný v $L_2(0, \pi)$.

Príklad 4.7: Na intervale $a < x < b$ je systém funkcií

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

úplný ortonormálny systém funkcií v $L_2(0, \pi)$.

Analogické tvrdenie platí pre viacrozmerné oblasti.

Príklad 4.8: Nech G je obdĺžnik $0 < x < a, 0 < y < b$. Potom systém funkcií

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$$

je úplný ortonormálny systém v $L_2(G)$

Poznámka 4.3: Ak je ortonormálny systém úplný v $L_2(G)$, potom každú funkciu možno vyjadriť v tvare jej Fourierovho radu, to jest ako lineárnu kombináciu (nekonečného) systému týchto funkcií, a preto tomuto systému hovoríme **ortonormálna báza**.

Definícia 4.11: Systém funkcií

(4.15) $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ z $L_2(G)$ (nemusi byť ani ortogonálny ani normovaný) sa nazýva **úplný** v $L_2(G)$ ak je množina všetkých lineárnych kombinácií prvkov tohto systému **hustá** v $L_2(G)$.

To jest: Ku každej funkcii $u(x) \in L_2(G)$ a ku každému $\varepsilon > 0$ možno nájsť prirodzené

číslo n a čísla $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ tak, že platí: $\rho(u, \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \psi_k) < \varepsilon$.

Ak je okrem toho uvedený systém **lineárne nezávislý** v $L_2(G)$, potom tvorí **bázu** v $L_2(G)$.

Poznámka 4.4: Existujú aj iné definície bázy, napr. Schauderova báza.

Príklad 4.9: Neortonormálnou bázou v priestore $L_2(a, b)$ je postupnosť

$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ a podobne vo viacdimenzionálnom priestore je to systém mnohočlenov, napríklad pre dvojrozmernú oblasť je to systém mnohočlenov

$$1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots$$

Poznámka 4.10: Z úplného systému, ktorý nie je vo všeobecnosti ani ortogonálny ani ortonormálny sa dá vytvoriť takýto systém tzv. **Schmidtovým ortogonalizačným resp. ortonormalizačným procesom** (viď Rektorys. strana 62)

Rozklad priestoru $L_2(G)$ na ortogonálne podpriestory

Definícia 4.12: Lineárnym podpriestorom priestoru $L_2(G)$ budeme nazývať úplný lineárny podpriestor priestoru $L_2(G)$ s príslušnou metrikou tohto priestoru.

Príklad 4.10: Nech M je množina všetkých konštantných funkcií definovaných na intervale $(0,1)$. Ukážte, že je to lineárny priestor. Ukážte, že s metrikou lineárneho priestoru $L_2(0,1)$ je to lineárny podpriestor priestoru $L_2(0,1)$.

Príklad 4.11: Nech L je množina spojitých funkcií na uzavretom intervale $<-1,1>$. Tento lineárny priestor nie je s metrikou priestoru $L_2(-1,1)$ úplným priestorom, preto nie je podpriestor $L_2(-1,1)$.

Označme $M_{L_2(G)}$ lineárny priestor, kde $M \subset L_2(G)$ s metrikou priestoru $L_2(G)$.

Veta 4.10: Priestor $M_{L_2(G)}$ je lineárnym priestorom priestoru $L_2(G)$ práve vtedy, keď je M uzavretá množina v $L_2(G)$.

Veta 4.11: Nech N je lineárny podpriestor priestoru $L_2(G)$. Nech u je ľubovoľná funkcia v priestore $L_2(G)$. Potom túto funkciu je možné jednoznačne rozložiť na súčet

$$(4.16) \quad u(x) = v(x) + w(x),$$

kde v je funkcia z lineárneho podpriestoru N a funkcia w je ortogonálna ku každej funkcii z N .

Funkcia v sa nazýva **ortogonálna projekcia** funkcie u do podpriestoru N . Vlastnosť funkcie w zapisujeme krátko $w \perp N$ a hovoríme, že w je **ortogonálna na podpriestor** N .

Príklad 4.12: Uvažujme v priestore $L_2(0,1)$ lineárny podpriestor všetkých konštantných funkcií definovaných na intervale $(0,1)$ s metrikou priestoru $L_2(0,1)$.

Rozložte funkciu $u(x) = x^2$, $x \in <0,1>$ na súčet, kde jeden sčítanec bude ortogonálna projekcia do uvedeného podpriestoru.

Dá sa ukázať, že množina všetkých funkcií ortogonálnych k danému podpriestoru je tiež lineárny podpriestor priestoru $L_2(G)$. Označme ho K . Hovoríme, že priestor $L_2(G)$ je **ortogonálnym súčtom** podpriestorov N a K a zapisujeme

$$(4.17) \quad L_2(G) = N \oplus K$$

Podpriestoru K hovoríme **ortogonálny doplnok** podpriestoru N v priestore $L_2(G)$.

Vlastnosti skalárneho súčinu

Veta 4.12: Nech postupnosť $\{u_n(x)\}$ konverguje v priestore $L_2(G)$ k funkcii $u(x)$ a postupnosť $\{v_n(x)\}$ konverguje v priestore $L_2(G)$ k funkcii $v(x)$. Potom postupnosť skalárnych súčinov (u_n, v_n) konverguje k skalárnemu súčinu (u, v) .

Stručne: $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \text{ v } L_2(G) \Rightarrow (u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$.

Dôsledok 4.1: 1. Ak je $u_n \rightarrow u, v \in L_2(G) \Rightarrow (u_n, v) \rightarrow (u, v)$

$$2. \text{ Ak je } u_n \rightarrow u, v \in L_2(G) \Rightarrow \|u_n\| \rightarrow \|u\|$$

Veta 4.13: Nech M je hustá množina v $L_2(G)$ a nech $u(x)$ je ortogonálna ku každej funkcii z množiny M potom $u=0$ v $L_2(G)$.

5. Hilbertov priestor

Unitárny priestor

Nech M je ľubovoľná množina prvkov (funkcie vektory..). Uvedieme tu výsledky predchádzajúcich kapitol vo všeobecnom prípade.

Definícia 5.1.: Hovoríme, že M je **lineárny priestor na telesom reálnych čísel**, (vektorový priestor...) ak má tieto vlastnosti:

1. Pre ľubovoľné prvky $u, v \in M$ je definovaný súčet $u + v$ a pre každý prvok $u \in M$ a každé reálne číslo $a \in \mathbb{R}$ je definovaný súčin au , pričom $u + v$ aj au sú opäť prvky z M .

2. Pre takto zavedené operácie súčtu a súčinu platia axiomy:

$$(5.1) \quad u + v = v + u, \quad u + (v + z) = (u + v) + z,$$

$$(5.2) \quad a(u + v) = au + av, \quad (a + b)u = au + bu,$$

$$(5.3) \quad a(bu) = (ab)u, \quad 1 \cdot u = u$$

3. Existuje taký prvok $0 \in M$, že platí $u + 0 = u$ pre každé $u \in M$. Tento prvok nazývame **nulovým prvkom**.

4. Ku každému prvku $u \in M$ existuje prvok $v \in M$ tak, že platí $u + v = 0$. Tento prvok nazývame **opačným** k prvku u .

Nulový prvok v M ako aj opačný prvok k prvku u sú jednoznačne určené.

Príklad 5.1: Euklidovské priestory, množina všetkých spojitých funkcií na uzavretej oblasti $\bar{G}$.

Definícia 5.2: Hovoríme, že na lineárnom priestore je definovaný **skalárny súčin**, ak je každej dvojici prvkov u, v z M priradené reálne číslo, označujeme ho (u, v) s vlastnosťami:

$$(5.4) \quad (u, v) = (v, u)$$

$$(5.5) \quad (a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v)$$

$$(5.6) \quad (u, u) \geq 0, \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad \forall \quad u \in M$$

Príklad 5.2: Klasický skalárny súčin v euklidovskom priestore, integrál zo súčiny funkcií v priestore L_2

Definícia 5.3: Nech na lineárnom priestore M je definovaný skalárny súčin v zmysle predchádzajúcej definície. Potom čísla:

$$(5.7) \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

$$(5.8) \quad \rho(u, v) = \|u - v\|$$

nazývame **norma a vzdialenosť (metrika)** v M .

Veta 5.1: Nech sú $u(x), v(x), z(x), u_1(x), u_2(x)$ ľubovoľné prvky z M a a, a_1, a_2 sú ľubovoľné reálne čísla. vyššie definovanú normu a vzdialenosť platia vzťahy:

$$(5.9) \quad \|u\| \geq 0,$$

$$(5.10) \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \quad \forall \quad u \in M,$$

$$(5.11) \quad \|au\| = |a| \cdot \|u\|,$$

$$(5.12) \quad \left| (u, v) \right| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

$$(5.13) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

$$(5.14) \quad \left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|$$

$$(5.15) \quad \rho(u, u) \geq 0,$$

$$(5.16) \quad \rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x) \quad \forall \quad x \in M,$$

$$(5.17) \quad \rho(u, v) = \rho(v, u),$$

$$(5.18) \quad \rho(u, z) \leq \rho(u, v) + \rho(v, z)$$

Definícia 5.4: Lineárny priestor s metrikou, kde norma je odvodená od skalárneho súčinu, nazývame **unitárnym** priestorom.

V ďalšom budeme takýto priestor označovať S_2 .

Definícia 5.4: Hovoríme, že postupnosť prvkov $u_n \in S_2$ **konverguje v priestore S_2** k prvku $u \in S_2$, ak platí:

$$(5.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0.$$

Zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \forall \quad u \in S_2$. Stručne $u_n \rightarrow u \quad \forall \quad u \in S_2$.

Prvok u nazývame **limita postupnosti** $\{u_n\}$ v S_2 .

Veta 5.2: Postupnosť funkcií $u_n \in S_2$ môže mať v priestore S_2 najviac jednu limitu.

Definícia 5.5: Postupnosť funkcií $u_n \in S_2$ sa nazýva **cauchyovská (fundamentálna)** v priestore S_2 , ak platí:

$$(5.20) \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \rho(u_m, u_n) = 0$$

Veta 5.3: Každá postupnosť konvergentná v S_2 je v tomto priestore cauchyovská.

Poznámka 5.1: Opačné tvrdenie neplatí.

Definícia 5.6: Priestor S_2 sa nazýva **úplný** ak každá cauchyovská postupnosť je v ňom konvergentná.

Definícia 5.7: Ak je unitárny priestor S_2 úplný, nazývame ho **Hilbertovým** priestorom. Spravidla ho označujeme symbolom H .

Príklad 5.3: Priestor $L_2(G)$ je Hilbertovým priestorom.

Veta 5.4: V každom separabilnom Hilbertovom priestore existuje báza.

Definícia 5.8: Lineárny normovaný metrický priestor, ktorý je úplný v metrike indukovanej normou sa nazýva **Banachov priestor**.

Príklad 5.4: Priestor $L_2(G)$ je Banachov priestor.

Veta 5.5: Ak je v LN (lineárnom normovanom) priestore s metrikou indukovanou normou postupnosť $\{u_n\}$ cauchyovská, potom je postupnosť $\{\|u_n\|\}$ príslušných noriem konvergentná.

Veta 5.6: Ak je v LN (lineárnom normovanom) priestore s metrikou indukovanou normou postupnosť $\{u_n\}$ konvergentná alebo aspoň cauchyovská, potom je v norme ohraničená, to jest existuje číslo K , také, že $\|u_n\| \leq K$ pre všetky n .

Cvičenia:

5.1. Nech M je množina všetkých vektorových funkcií

$u(x) = u_1(x)\mathbf{i} + u_2(x)\mathbf{j}$, ktorej zložky $u_1(x), u_2(x)$ sú funkcie integrovateľné s druhou mocninou v oblasti G . Definujeme sčítanie vektorových funkcií a násobenie vektorovej funkcie skalárom po zložkách. Ukážte, že M je lineárny priestor s nulovým prvkom nulovou vektorovou funkciou.

Definujeme skalárny súčin vektorových funkcií vzťahom

$(u, v) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$, kde jednotlivé zložky sú skalárne súčiny funkcií. Ukážte, že takto definovaná funkcia je naozaj skalárny súčin.

5.2. Uvažujme lineárny priestor (LP) M , ktorého prvky sú funkcie spojité aj so spojitými prvými deriváciami na uzavretom intervale $<0,1>$ s obvyklou definíciou sčítania funkcií a násobenia funkcie skalárom. Nulovým prvkom je nulová funkcia.

Definujme $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$

Ukážte, že týmto vzťahom je na LP M definovaný skalárny súčin.

5.3. Ak uvažujeme ten istý LP M ako v predchádzajúcom príklade a definujeme

$(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$. Ukážte, že tento vzťah nedefinuje skalárny súčin na M

a zdôvodnite prečo.

5.4. Vysvetlite, čo znamená konvergencia postupnosti funkcií v priestore definovanom v príklade 2.