Slovenská technická univerzita
v Bratislave
Stavebná fakulta
ŠVOČ
Akademický rok 2010/2011

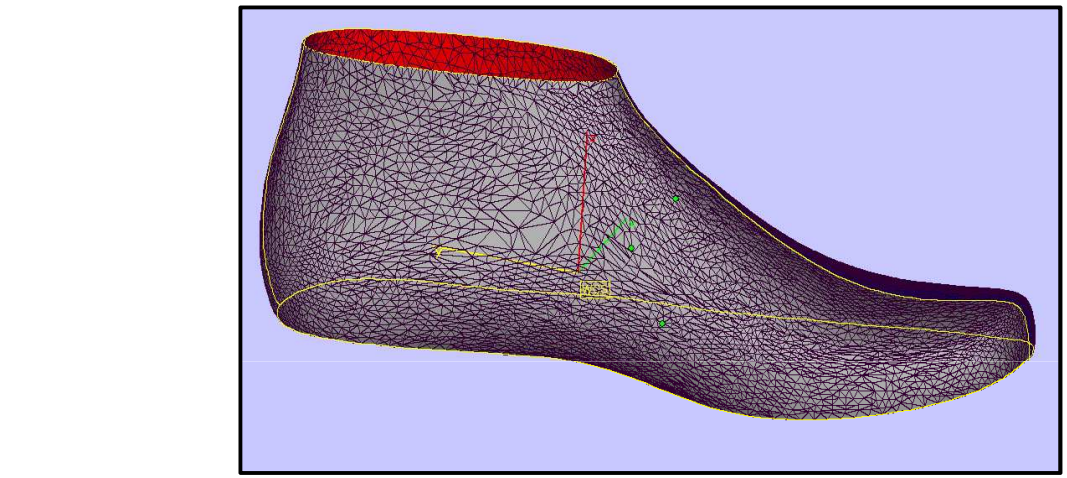
VYUŽITIE METÓD EVOLÚCIE PLÔCH V SOFTVÉRI PRE OBUVNÍCKY PRIEMYSEL

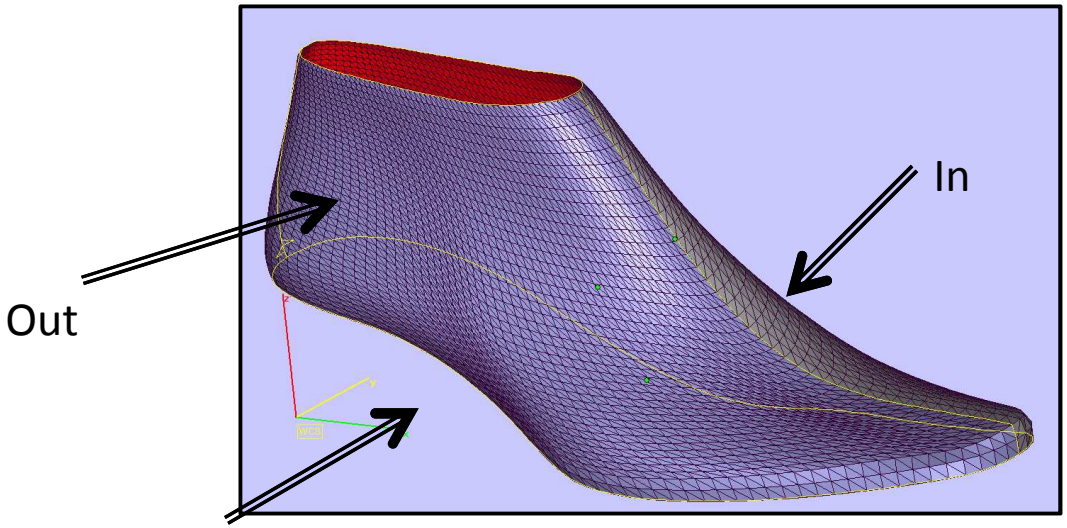
V Splupráci s firmou Wing s.r.o Partizánske

Bratislava 13. apríl 2011

Meno Priezvisko študenta: Martin Tunega
Ročník a program/odbor štúdia: 2. ročník/2. stupen štúdia MPM
Vedúci práce: Prof . RNDr. Mikula Karol, DrSc.
Katedra: KMaDG

Vstupné dáta





2419 bodov
7058 hrán
4640 trojuholníkov

Vývoj topánkovej plochy v smere strednej krivosti

Rovnica popisujúca pohyb plochy závislý od krivosti:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \Delta_S \mathbf{r}(\mathbf{x},t) \quad t \in [0,T] \quad \mathbf{x} \in \omega \subset \mathbf{R}^3$$

Počiatočná podmienka $\mathbf{r}(0) = \omega$

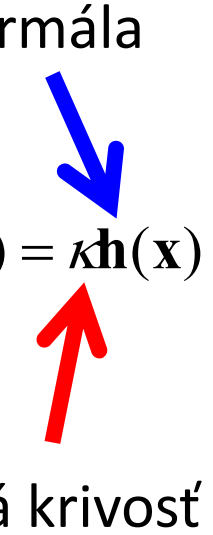
Δ_S - Laplace-Beltramiho operátor: $\Delta_S \mathbf{r}(\mathbf{x},t) = \kappa \mathbf{h}(\mathbf{x})$

ω - Súvislá, hladká plocha

$\mathbf{r}(\mathbf{x},t) = [x(t), y(t), z(t), t]$ - Vektorová funkcia

$\mathbf{x} \in \omega \subset \mathbf{R}^3$ - Priestorová premenná

t - čas

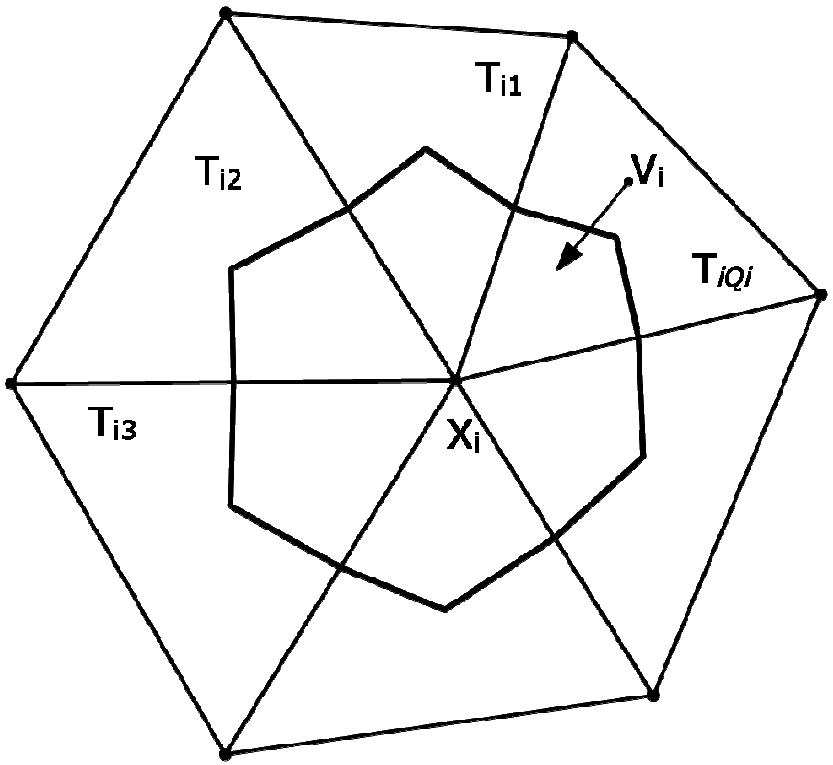


Metóda konečných objemov

- Diskretizácia - čas
  - priestor
- Definícia slabej formulácie difirenciálnej rovnice
- Numerická aproximácia slabej formulácie
- Vytvorenie lineárneho systému

Duálna sieť

$\mathbf{V}_i$ definujeme ako polygón ohraničený priamkami, ktoré spájajú stredy hrán vychádzajúcich z $\mathbf{X}_i$ a ťažiská trojuholníkov $\mathbf{T}_{iq}$



Slabá formulácia

- Diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \Delta_S \mathbf{r}(\mathbf{x},t)$$

- Použijeme Greenovu vetu

$$\int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dx - \int_{\partial V_i} \nabla_S \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_i ds = 0$$

$\bar{\eta}_i$ – normála na hranicu V_i

- Z geometrie konečných objemov vyplýva:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dx - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_S \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{iq} ds = 0$$

Slabá formulácia na konečnom objeme

Numerická aproximácia slabej formulácie

- Použijeme spätnú diferenciu na časový deriváciu $$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^{k-1}}{\tau}$$

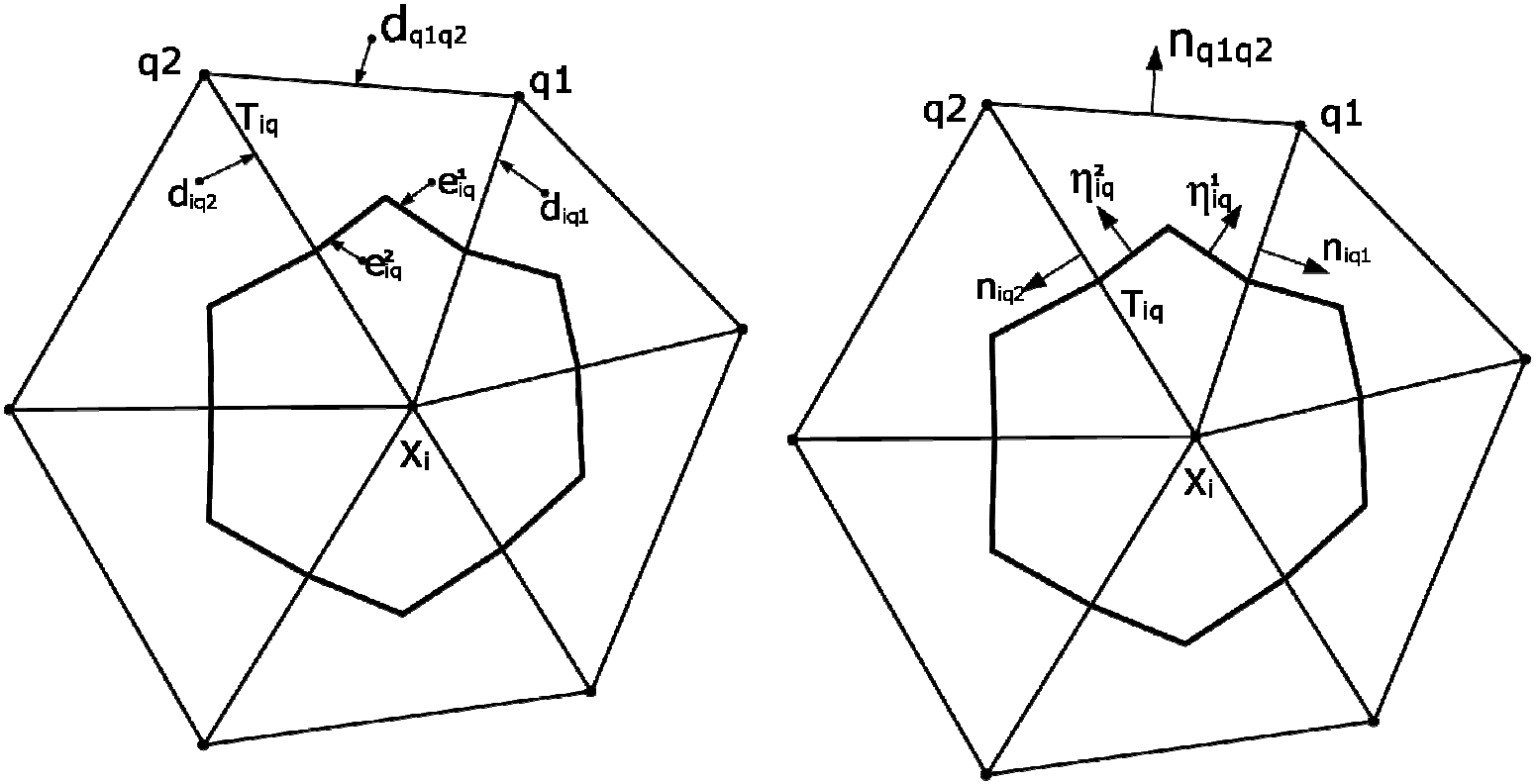
- Uvažujeme lineárnu reprezentáciu riešenia $\mathbf{r}^k$ na trojuholníkoch $$\nabla_S \mathbf{r}^k \approx P^k_{T_{iq}} = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{T_{iq}} \nabla_S \mathbf{r}^k dx$$

- Aplikáciou Greenovej vety $$P^k_{T_{iq}} = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{\partial T_{iq}} \mathbf{r}^k \vec{n}_{iq} ds$$

  $\bar{n}_{iq}$ normála na trojuholník T_{iq}

- Lineárna reprezenácia riešenia $$P^k_{T_{iq}} = \frac{1}{m(T_{iq})} \left(\frac{\mathbf{r}^k_i + \mathbf{r}^k_{q1}}{2} d_{iq1} \vec{n}_{iq1} + \frac{\mathbf{r}^k_i + \mathbf{r}^k_{q2}}{2} d_{iq2} \vec{n}_{iq2} + \frac{\mathbf{r}^k_{q1} + \mathbf{r}^k_{q2}}{2} d_{q1q2} \vec{n}_{q1q2} \right)$$

Numerická aproximácia slabej formulácie



Numerická aproximácia slabej formulácie

Rovnicu môžeme prepísať do tvaru

$$m(V_i)\frac{\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_i^{k-1}}{\tau} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} P_{T_{iq}}^k \cdot \vec{\eta}_{iq} ds = 0$$

$$\mathbf{r}_i^k - \frac{\tau}{m(V_i)} \sum_{q=1}^{Q_i} \left(m(e_{iq}^1)\vec{\eta}_{iq}^1 \cdot P_{T_{iq}}^k + m(e_{iq}^2)\vec{\eta}_{iq}^2 \cdot P_{T_{iq}}^k \right) = \mathbf{r}_i^{k-1}$$

semi-implicitná schéma

$$\mathbf{A}x^k = x^{k-1}$$
$$\mathbf{A}y^k = y^{k-1}$$
$$\mathbf{A}z^k = z^{k-1}$$

Zostavenie systému lineárnych rovníc

- Riešenie hladáme pomocou SOR algoritmu

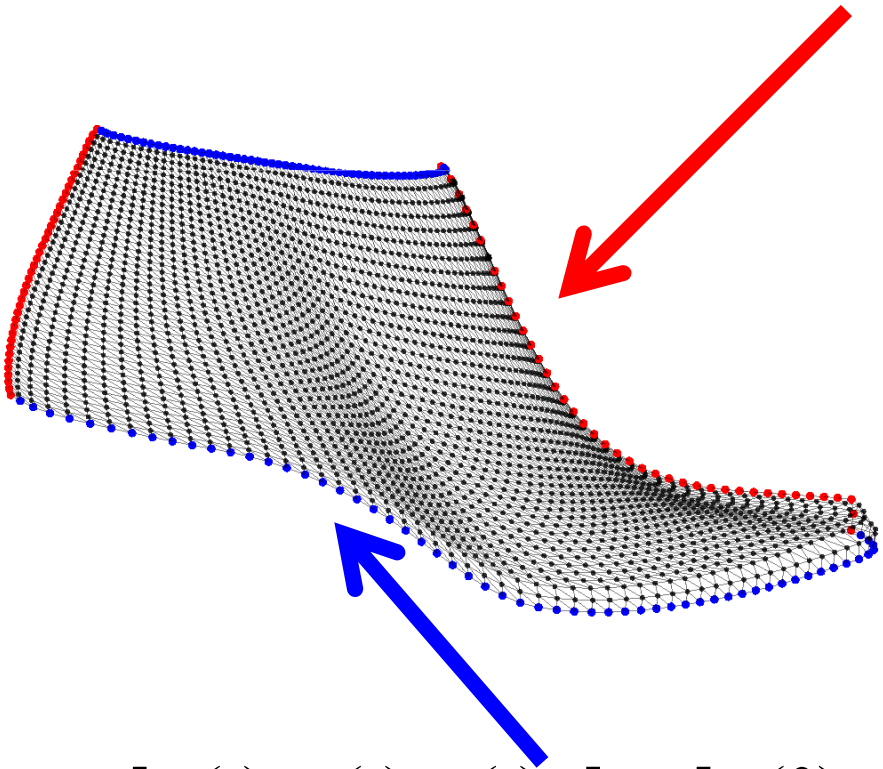
- matica $\mathbf{A}$ musí byť diagonálne dominantná:

$$\left|\mathbf{A}_{ii}\right| \geq \sum_{i \neq j} \left|\mathbf{A}_{ij}\right|$$

- Diagonálnu dominantnosť zabezpečíme vhodnou voľbou časového kroku

$$\tau_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m(V_i)$$

Vývoj topánkovej plochy – voľba okrajovej podmienky



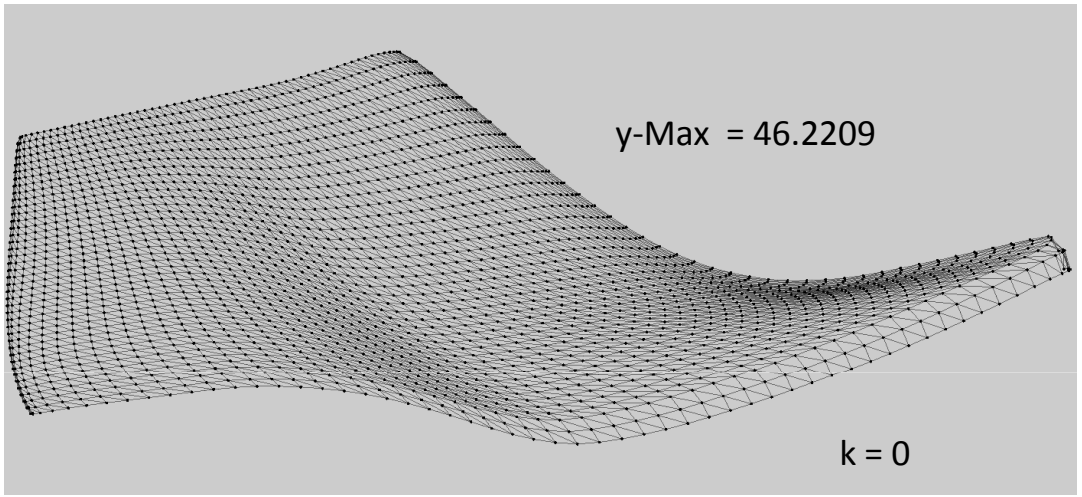
Dirichletova OP

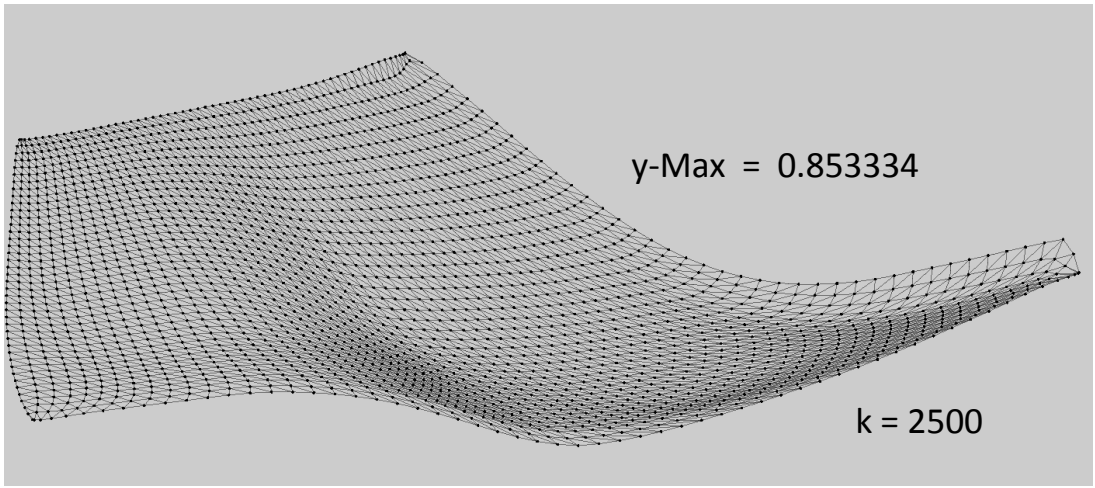
$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_i, t) = \mathbf{r}(\mathbf{x}_i, 0), i \in \mathrm{N}_r$$

$$\mathbf{r}[x_i(t), y_i(t), z_i(t), t] = \mathbf{r}[x_i(0), y_i(t), z_i(0), t], i \in \mathrm{N}_b$$

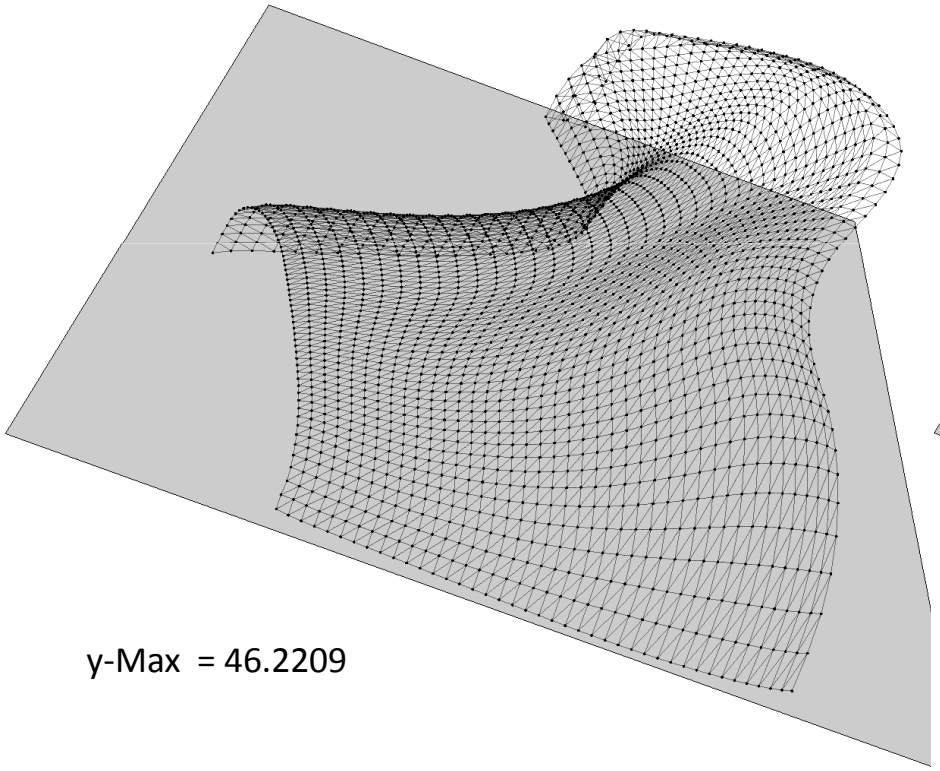
Vývoj topánkovej plochy – výsledky

887.150000



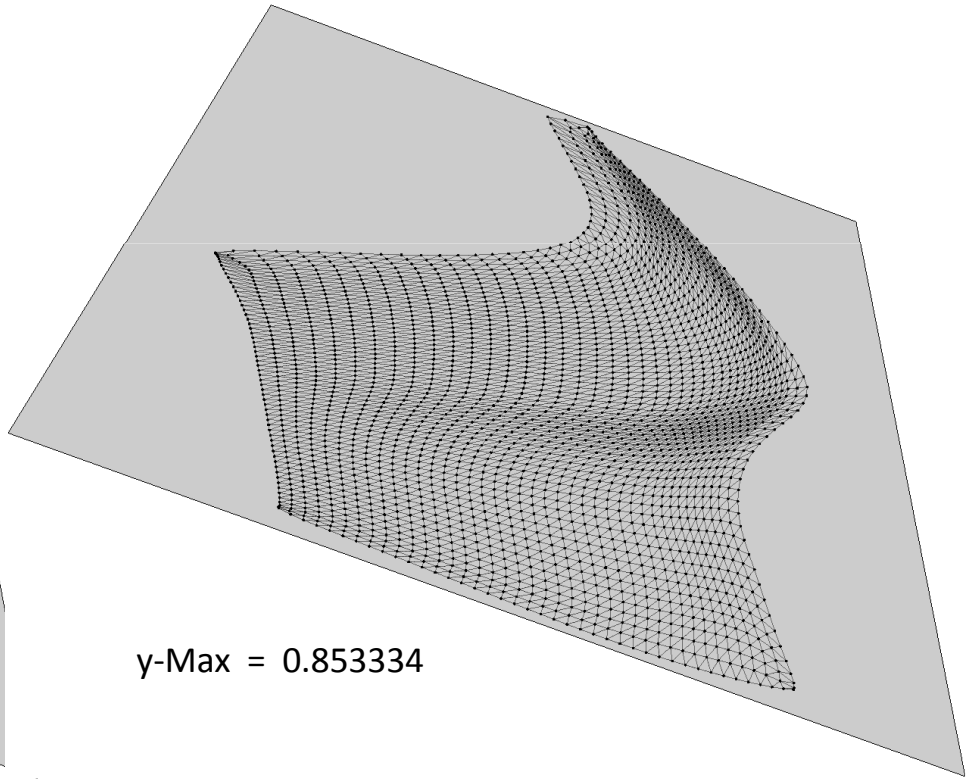


Vývoj topánkovej plochy – výsledky



y-Max = 46.2209

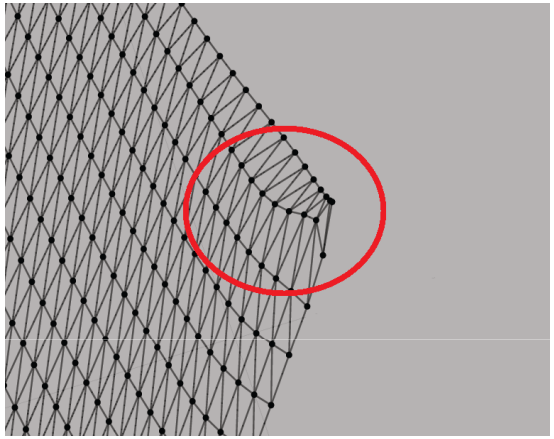
k = 0

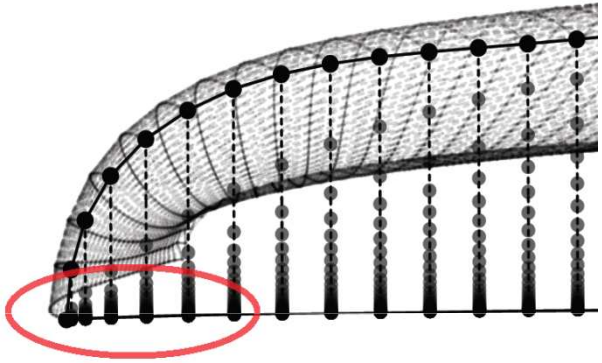


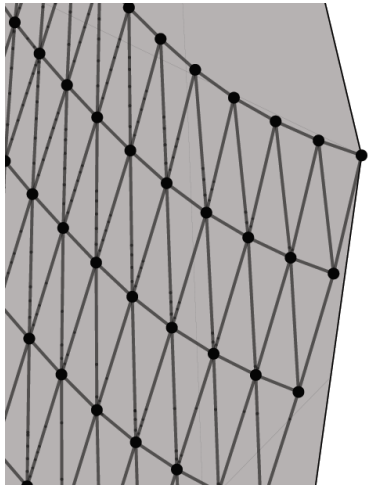
y-Max = 0.853334

k = 2500

Vývoj topánkovej plochy – výsledky







Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou

Rovnica popisujúca vývoj krivky v smere krivosti s rovnomernou redistribúciou bodov na krivke vo vektorovom poli $\mathbf{v}$

$$\partial_t \mathbf{r} = U\mathbf{N}_1 + V\mathbf{N}_2 + \alpha\mathbf{T}$$

Priemety vektora krivosti $k\mathbf{N}$ do smerov $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$

$$\kappa_1 = \kappa\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_1$$
$$\kappa_2 = \kappa\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_2$$

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbf{N}_\mathbf{v}}{|\mathbf{N}_\mathbf{v}|} \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{T}$$
$$\mathbf{N}_\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})\mathbf{T}$$

$$U = \delta_1 \kappa_1 + \delta_2 |\mathbf{N}_\mathbf{v}|$$
$$V = \delta_1 k_2$$

$\mathbf{T}$ - tangenta

$\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{T}$ - Ortogonálna báza

Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou

Rovnomernú redistribúciu docielime vhodnou voľbou tangenciálnej rýchlosti α

$$\partial_t \mathbf{r} = U\mathbf{N}_1 + V\mathbf{N}_2 + \alpha\mathbf{T}$$

$\frac{g}{L} \to 1$ alebo $\theta = \ln\left(\frac{g}{L}\right) \to 0$

g - lokálna dĺžka krivky

L - celková dĺžka krivky

platí [4]

$$\partial_t g = g\partial_s \alpha - g(U\kappa_1 + V\kappa_2)$$

$$\partial_t L = < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma L$$

$$\partial_t \theta = \partial_t \ln\left(\frac{g}{L}\right) = \partial_s \alpha - (U\kappa_1 + V\kappa_2) + < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma L$$

[4] T. Y. Hou, I. Klapper and H. Si, *Removing the Stiffness of Curvature in Computing 3-D Filaments*, J. Comput. Phys. , 143 , 628-664 1

Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou

Pri voľbe $\partial_t \theta = (e^{-\theta} - 1)\omega_r$

ω_r - parameter, ktorý riadi rýchlosť redistribúcie

$$\partial_s \alpha = (U\kappa_1 + V\kappa_2) - < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma + \left(\frac{L}{g} - 1\right)\omega_r$$

$$\partial_s \alpha \approx \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{h_i}$$

$$\alpha_i^k = \alpha_{i-1}^k + h_i^k (U_i^k \kappa_{1i}^k + V_i^k \kappa_{2i}^k) - h_i^k < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma^k + \left(\frac{L^k}{N} - h_i^k\right)\omega_r$$

zvolíme $\alpha_0^k = 0$

Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou

Platí $\mathbf{T} = \partial_s \mathbf{r}$ a $\kappa \mathbf{N} = \partial_{ss} \mathbf{r} \implies \partial_t \mathbf{r} = \delta_1 \partial_{ss} \mathbf{r} + \alpha \partial_s \mathbf{r} + \delta_2 \mathbf{N}_\mathbf{v}$

Použitím semi-implicitnej schémy

$$\frac{h_{i+1}^k + h_i^k}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{k+1} + \mathbf{r}_i^k}{\tau} = \delta_2 \frac{h_{i+1}^k + h_i^k}{2} (\mathbf{N}_\mathbf{v})_i^k +$$
$$\delta_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{r}_i^{k+1}}{h_{i+1}^k} \frac{\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{k+1}}{h_i^k} \right) + \frac{\alpha_i^k}{2} (\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{k+1}),$$

Trojdiagonálny systém $A_i^k \mathbf{r}_{i-1}^{k+1} + B_i^k \mathbf{r}_i^{k+1} + C_i^k \mathbf{r}_{i+1}^{k+1} = F_i^k$

Riešením sú súradnice bodov krivky $\mathbf{r}$

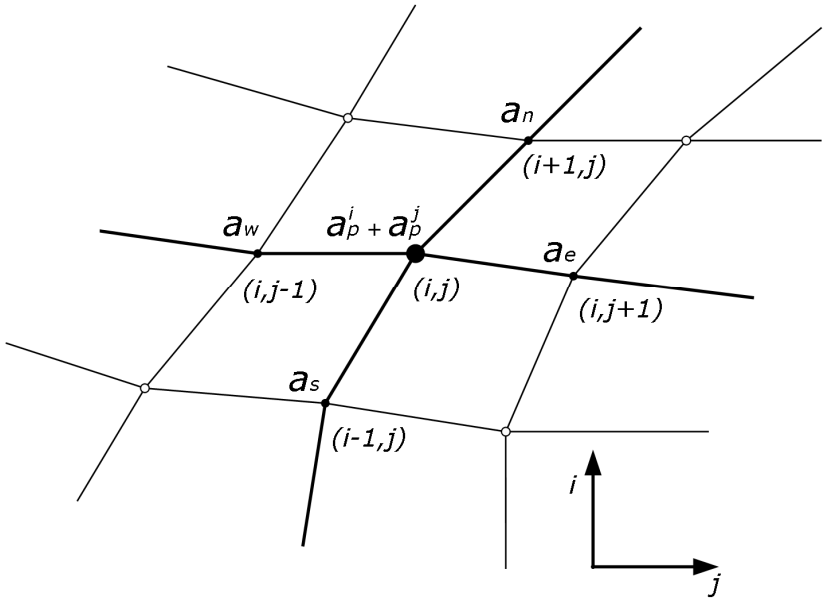
Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou

i-ta krivka $$a_w r_{i,j-1}^{k+1} + a_p^i r_{i,j}^{k+1} + a_e r_{i,j+1}^{k+1} = f_{pi}^k$$

j-ta krivka $$a_s r_{i-1,j}^{k+1} + a_p^j r_{i,j}^{k+1} + a_n r_{i+1,j}^{k+1} = f_{pj}^k$$

Zviazaný pohyb kriviek

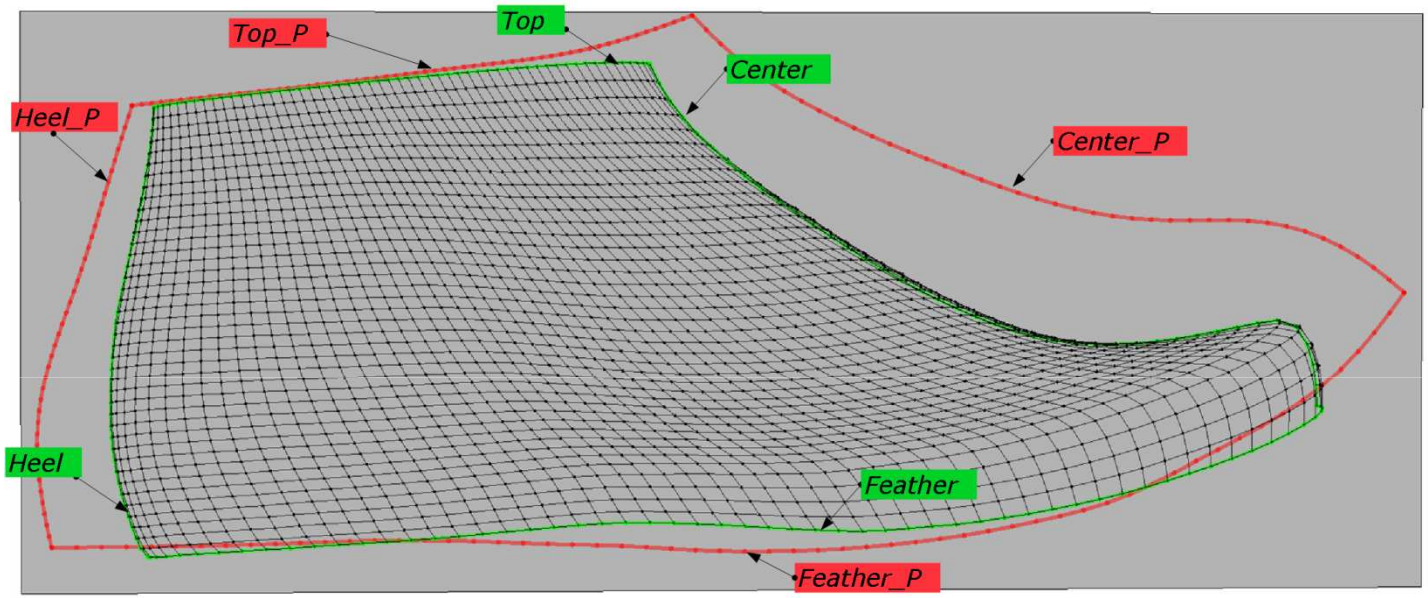
$$a_s r_{i-1,j}^{k+1} + a_w r_{i,j-1}^{k+1} + (a_p^i r_{i,j}^{k+1} + a_p^j r_{i,j}^{k+1}) + a_e r_{i,j+1}^{k+1} + a_n r_{i+1,j}^{k+1} = f_{pi}^k + f_{pj}^k$$



Riešime SOR

Popisuje pohyb vnútorných kriviek plochy

Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou



$$\mathbf{v}_i = \delta\left({}^{red}\mathbf{r}_i - {}^{green}\mathbf{r}_i\right)$$

Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou - Výsledky

Video

Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistibúciou - Výsledky

Ďakujem za pozornosť