4. PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE

V predchádzajúcich častiach sme riešili niektoré typy obyčajných diferenciálnych rovníc, v ktorých vystupovala neznáma funkcia, alebo funkcie jednej premennej spolu so svojimi deriváciami. V tejto časti sa budeme zaoberať riešením typov *parciálnych diferenciálnych rovníc*. Sú to rovnice, ktoré obsahujú neznámu funkciu viac premenných spolu s jej parciálnymi deriváciami. Všeobecne možno parciálnu diferenciálnu rovnicu napísať v tvare

$$F(t,x,y,\dots,u,u_t,u_x,u_y,\dots u_{tt},u_{xx},u_{xy},\dots) = 0$$

kde F je daná funkcia viac premenných, u je neznáma funkcia premenných t, x, y, prípadne z a

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \dots$$

sú parciálne derivácie funkcie u.

Rovnicu (1.1) uvažujeme v oblasti $D \subset R^n$. Hľadáme funkciu $u := u(t,x,y,\dots)$, ktorá identicky spĺňa danú parciálnu diferenciálnu rovnicu v oblasti D t.j.

$$F(t,x,y,\dots,u(t,x,y),u_t(t,x,y),\dots) = 0$$

$$\text{pre všetky } (t,x,y) \in D$$

Také funkcie nazývame *riešením* parciálnej diferenciálnej rovnice. Zameriame sa len na rovnice druhého rádu, ktoré modelujú široké spektrum rôznych fyzikálnych javov.

4.1 MATEMATICKÉ MODELOVANIE NIEKTORÝCH FYZIKÁLNYCH JAVOV

Rovnica priečneho kmitania struny - hyperbolická rovnica

Uvažujme napnutú strunu dĺžky a upevnenú na svojich dvoch koncoch. Našou úlohou bude nájsť pohybovú rovnicu, ktorá charakterizuje polohu $u(x,t)$ bodu x struny v čase t po určitom začiatočnom impulze. Budeme predpokladať, že

a) struna je ohybná a pružná, t.j. nekladie odpor ohybu a napätie v strune teda pôsobí vždy v smere dotyčnice k existujúcemu tvaru struny,

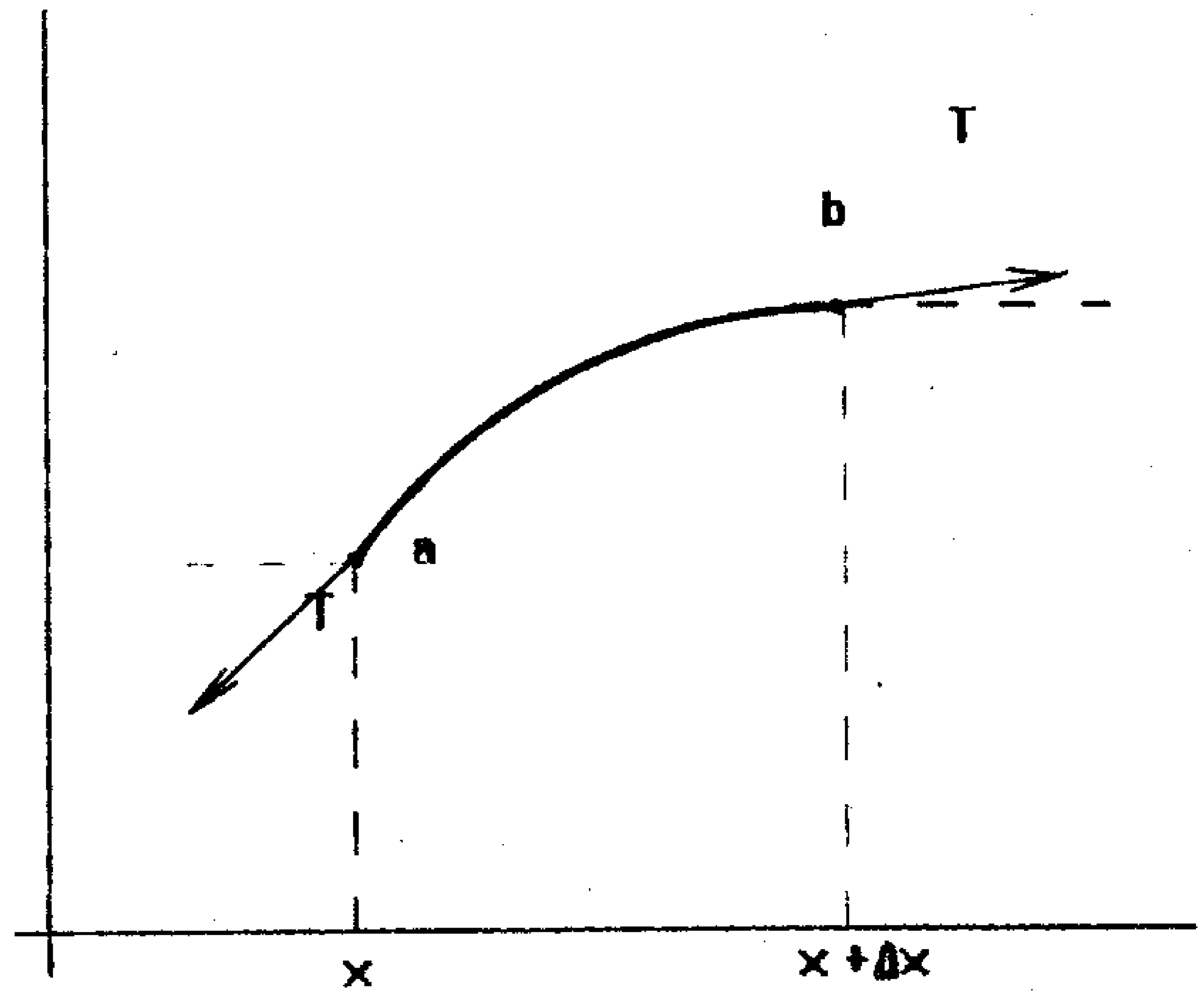
b) struna sa nepredĺži na žiadnom úseku, t.j. podľa Hookovho zákona je napätie v strune rovnaké,

c) priehyby struny sú malé v porovnaní s jej dĺžkou

d) struna kmitá v jednej rovine.

Uvažujme úsek struny od bodu x po bod $x + \Delta x$. Nech T je napätie v koncových bodoch úseku $[x,x + \Delta x]$, ako to vidíme na obr. 21. Sily pôsobiace na element struny vo vertikálnom smere sú

$$T \sin \beta - T \sin \alpha$$



Obr.21
Časť kmitajúcej struny

Podľa Newtonovho druhého pohybového zákona je výsledná sila rovná hmotnosti elementu násobenej zrýchlením. Tak dostávame

$$T \sin \beta - T \sin \alpha = \rho \Delta s \, u_{tt} \tag{1.1}$$

kde ρ je hustota a Δs je dĺžka oblúka struny. Podľa predpokladu smernica dotyčnice je malá, teda

$$\Delta s \simeq \Delta x$$

a pretože aj uhly α a β sú malé, môžeme nahradiť

$$\sin \alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha, \ \sin \beta \simeq \operatorname{tg} \beta$$

Potom rovnica (1.1) prejde na tvar

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho \, \Delta x}{T} u_{tt} \tag{1.2}$$

Na základe geometrickej interpretácie derivácie dostaneme vzťahy

$$\operatorname{tg} \alpha = u_x(x), \ \operatorname{tg} \beta = u_x(x + \Delta x)$$

Rovnica (1.2) sa potom dá napísať v tvare

$$\frac{1}{\Delta x} [u_x(x + \Delta x) - u_x(x)] = \frac{\rho}{T} u_{tt}$$

odkiaľ limitným prechodom pre $\Delta x \to 0$ dostaneme rovnicu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1.3}$$

kde $c^2 = \frac{T}{\rho}$. Dostali sme tak *jednorozmernú vlnovú rovnicu* alebo *rovnicu kmitania struny*.

Ak na strunu pôsobí vonkajšia sila F na jednotku dĺžky, potom sa homogénna rovnica (1.3) zmení na nehomogénnu.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f \ , \ f = \frac{F}{\rho} \tag{1.4}$$

Podobným spôsobom by sme dokázali odvodiť rovnicu *priečneho kmitania membrány*, alebo *dvojrozmernú vlnovú rovnicu*

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{1.5}$$

a ak na membránu pôsobí aj vonkajšia sila, rovnica má tvar

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f \tag{1.6}$$

Tak by sa dali postupne odvodiť trojrozmerná vlnová rovnica alebo aj viacrozmerná vlnová rovnica, ktorú by sme mohli všeobecne napísať v tvare

$$u_{tt} = c^2\ \Delta u \tag{1.7}$$

kde Δ je Laplaceov operátor, ktorý môže byť jedno-, dvoj-, troj- alebo viacrozmerný. Dvojrozmerný a trojrozmerný Laplaceov operátor majú tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Vlnová rovnica je dôležitá, pretože takýto typ rovnice sa vyskytuje v mnohých fyzikálnych problémoch napr.: zvukové vlny v priestore, elektrické vibrácie vo vodiči, vlnenie v magnetohydrodynamike, pozdĺžne kmitanie tyče atď.

Rovnice typu (1.6) nazývame aj *hyperbolickými rovnicami*.

Rovnica nestacionárneho vedenia tepla – parabolická rovnica

Iným základným typom parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorý sa tiež veľmi často vyskytuje v rôznych fyzikálnych aplikáciách je *rovnica vedenia tepla*. Uvažujme oblasť $\Omega \subset R^3$ ohraničenú plochou $\partial\Omega$. Nech $u(x,y,z,t)$ je teplota v bode (x,y,z) a v čase t . Ak teplota nie je konštantná, teplo prechádza z bodov s vyššou teplotou do bodov s nižšou teplotou. Podľa Fourierovho zákona je množstvo toku tepla úmerné gradientu teploty. Potom rýchlosť toku tepla v izotropickom telese je

$$\mathbf{v} = -\ K \text{ grad } u \tag{1.8}$$

kde K je konštanta, ktorú nazývame tepelnou vodivosťou prostredia. Nech D je ľubovoľná oblasť ohraničená uzavretou plochou ∂D v oblasti Ω. Potom množstvo tepla, ktoré opúšťa D za jednotku času, je

$$\iint_{\partial D} v_n dS$$

kde $v_n = \mathbf{v}.\mathbf{n}$ je zložka rýclosti $\mathbf{v}$ v smere vonkajšej normály $\mathbf{n}$ k ploche B . Podľa Gaussovej vety o vzťahu objemového a povrchového integrálu ([10], [18]) platí

$$\iint_{\partial D} v_n dS = \iiint_D \operatorname{div}(-\ K \text{ grad } u) dxdydz = -\ K \iiint_D \Delta u\ dxdydz$$

Súčasne je množstvo tepla v D rovné

$$\iiint_D \sigma\rho u\ dxdydz$$

kde ρ je hustota materiálu telesa a σ je jeho špecifické teplo. Na základe zameniteľnosti poradia derivovania a integrovania je zmena množstva tepla v D v čase t rovná integrálu

$$-\iiint_D \sigma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dxdydz$$

Avšak zmena množstva tepla v D sa musí rovnať množstvu tepla ktoré opúšťa oblasť D za jednotku času, a tak máme

$$-\iiint_D \sigma\rho\, u_t\, dxdydz = -K\iiint_D \Delta u\, dxdydz$$

alebo

$$\iiint_D [\rho\sigma u_t - K\Delta u]\, dxdydz = 0 \tag{1.9}$$

pre každú oblasť $D \subseteq \Omega$. Predpokladáme, že uvedený integrand je spojitý. Pretože D je ľubovoľná podoblasť oblasti Ω, je aj integrand v integrále (1.9) rovný nule Ω, a tak dostaneme parci- álnu diferenciálnu rovnicu

$$u_t = c^2\Delta u \tag{1.10}$$

kde $c = (\frac{K}{\sigma\rho})^{1/2}$.

Ak v telese pôsobia vnútorné zdroje tepla teplotnej hustoty $F(t,x,y,z)$, dostaneme nehomogénnu rovnicu

$$u_t = c^2\Delta u + f \tag{1.11}$$

kde $f = \frac{F}{c\rho}$.

V prípade nekonštantnej tepelnej vodivosti $K = K(x,y,z)$ má rovnica vedenia tepla tvar

$$u_t = \operatorname{div}\,[K(x,y,z)\operatorname{grad} u] + f,\ t > 0,\ (x,y,z) \in \Omega \tag{1.12}$$

Rovnica (1.11) alebo (1.12) sa nazýva aj *parabolická rovnica* a opisuje nielen vedenie tepla, ale aj difúzny proces.

Stacionárne vedenie tepla - eliptická rovnica

Ak nedochádza k zmene teploty v čase, prebieha v telese proces stacionárneho vedenia tepla. V tom prípade funkcia teploty u závisí len od priestorových premenných x, y, z. Teda $u_t = 0$ a rovnica stacionárneho vedenia tepla má tvar

$$-\operatorname{div}\,[K(x,y,z)\operatorname{grad} u] = f\ ,\ (x,y,z) \in \Omega \tag{1.13}$$

Rovnicu (1.13), v ktorej

$$K(x,y,z) \ge K_0 > 0 \text{ pre všetky body } (x,y,z) \in \Omega$$

nazývame *eliptickou rovnicou*.

Ak $K(x,y,z) = K_0 > 0$, dostaneme eliptickú rovnicu

$$-\Delta u = f \tag{1.14}$$

ktorú nazývame aj *Poissonovou rovnicou*. Ak $f = 0$ v Ω, dostaneme *Laplaceovu rovnicu*

$$\Delta u = 0 \tag{1.15}$$

Všeobecnejší tvar eliptickej rovnice je

$$-\operatorname{div}\,[K(x,y,z)\operatorname{grad} u] + q(x,y,z)u = f, \quad (x,y,z) \in \Omega$$

$$\text{Ak} \quad K(x,y,z) = 1, \; q(x,y,z) = -k^2, \; k > 0$$

dostaneme rovnicu

$$-\Delta u - k^2 u = g \tag{1.16}$$

ktorá sa nazýva *Helmholtzova rovnica*. Funkcia u vyjadruje amplitúdu vlnovej funkcie $w = u\, e^{i\omega t}$, ak pravá strana vlnovej rovnice (1.11) má tvar $f(t,x,y,z) = g(x,y,z)e^{i\omega t}$, $\omega > 0$.

Priebeh napätia elektrického poľa

Doteraz uvedené parciálne diferenciálne rovnice vyjadrujú rôzne fyzikálne deje, ktoré navzájom vôbec nesúvisia. Ukážeme si napr., že vlnová rovnica vyjadruje súčasne časovo-priestorový priebeh elektrického napätia vo vákuu. Maxwellove rovnice pre vákuum majú tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.17}$$

pričom $\mathbf{H}$ je napätie magnetického poľa a $\mathbf{E}$ je napätie elektrického poľa. Ak aplikujeme operátor rotácie na prvú rovnicu dostaneme:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \mathbf{H} \tag{1.18}$$

Podľa známeho vzťahu z vektorového počtu dostaneme rovnosť

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$$

Z Maxwellových rovníc (1.17) vidíme, že $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, a teda

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$$

Ak tento vzťah dosadíme do (1.18) a použijeme poslednú z rovníc (1.17), dostaneme rovnicu pre $\mathbf{E}$

$$c^2 \Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_{tt}$$

čo je vlastne vlnová rovnica. Podobne by sme mohli ukázať, že aj rovnica stacionárneho a nestacionárneho vedenia tepla sú aj rovnicami iných fyzikálnych javov.

V tejto časti sa budeme zaoberať riešením začiatočno-okrajových úloh (ďalej aj ZOU) pre hyperbolické a parabolické PDR a okrajových úloh (OU) pre eliptické PDR metódou separácie premenných. Túto metódu si ukážeme na najjednoduchších úlohách pre kmitanie struny, nestacionárne vedenie tepla v tyči a stacionárne vedenie tepla v obdĺžnikovej doske.

Okrajovou úlohou pre eliptickú PDR rozumieme hľadanie riešenia eliptickej rovnice na oblasti Ω, ktoré spĺňa dodatočné podmienky na jej hranici $\partial\Omega$. Iieto podmienky sa nazývajú *okrajové podmienky*. Okrajových podmienok je viac typov. My sa zameriame na nasledujúce okrajové podmienky (OP) pre rovnice 2. rádu.

a) *Dirichletove* OP: na hranici oblasti sú predpísané hodnoty riešenia u;

b) *Neumannove* OP: na hranici oblasti sú predpísané hodnoty pre $\frac{\partial u}{\partial n}$ – deriváciu v smere vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$; hranici oblasti,

c) *Newtonove* OP: na hranici $\partial\Omega$ sú predpísané hodnoty pre funkcie $\frac{\partial u}{\partial n} + hu$, kde h je kladná funkcia definovaná na $\partial\Omega$;

d) *Zmiešané* OP : na jednotlivých častiach hranice sú splnené predchádzajúce OP .

Príslušné okrajové úlohy nazývame Dirichletove, Neumannove, Newtonove, zmiešané.

V prípade nestacionárnych rovníc – parabolických a hyperbolických predpisujeme popri okrajových aj *začiatočné podmienky*. Pri parabolickej rovnici, ktorá je 1. rádu vzhľadom na časovú premennú t predpisujeme hodnotu riešenia v začiatočnom okamihu $t_0 = 0$ a pri hypebolickej predpisujeme hodnoty riešenia a prvej derivácie podľa t v čase $t_0 = 0$. Úlohy tohto typu sa nazývajú *začiatočno-okrajové úlohy*.

Rovnica kmitania struny

Skúmajme problém priečneho kmitania struny dĺžky a, ktorá je upevnená na svojich koncoch $x = 0$ a $x = a$. Struna má začiatočný tvar vyjadrený funkciou $f(x)$ a začína kmitať začiatočnou rýchlosťou $g(x)$. Túto fyzikálnu formuláciu prevedieme do matematickej reči takto:

Hľadáme riešenie rovnice

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < a\,,\ t > 0 \tag{2.1}$$

s OP (Dirichletove OP)

$$u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{2.2}$$

$$u(a,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{2.3}$$

a so ZP

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < a \tag{2.4}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \le x \le a \qquad (2.5)$$

Rovnica (2.1) spolu s OP (2.2), (2.3) a ZP (2.4) a (2.5) tvoria začiatočno-okrajovú úlohu pre rovnicu kmitania struny. Podstata metódy separácie premenných tkvie v tom, že riešenie rovnice (2.1) hľadáme v tvare

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (2.6)$$

Ak dosadíme (2.6) do rovnice (2.1), dostaneme

$$XT'' = c^2X''T$$

a pretože hľadáme riešenie, pre ktoré $XT \neq 0$, máme:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} \qquad (2.7)$$

Pretože ľavá strana rovnice (2.7) nezávisí od t a pravá strana nazávisí od x , musí platiť:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda$$

kde λ je separačná konštanta. Záporné znamienko pred konštantou volíme z praktických dôvodov, ktoré vyplynú z ďalšieho postupu. Dostávame dve rovnice:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (2.8)$$

a

$$T'' + \lambda c^2T = 0 \qquad (2.9)$$

Ďalej použijeme Dirichletove OP (2.2), (2.3). Dostaneme vzťahy:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

a

$$u(a,t) = X(a)T(t) = 0$$

Pretože $T(t) \neq 0$, máme okrajové podmienky pre funkciu X :

$$X(0) = 0 \qquad (2.10)$$

$$X(a) = 0 \qquad (2.11)$$

Keď chceme nájsť funkciu $X(x)$, musíme vyriešiť *úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie*:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(1) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Podrobnejšie sa úlohou tohto typu budeme zaoberať v nasledujúcej časti. Úloha tkvie v hľadaní takých hodnôt parametra λ , pre ktoré existuje nenulové riešenie okrajovej úlohy (2.12). Obyčajnú diferenciálnu rovnicu v (2.12) vieme riešiť. Rozlišujeme tri prípady: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

a) $\lambda < 0$. Všeobecné riešenie má v tomto prípade tvar podľa známych poznatkov z časti 2.2 tvar

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

kde A, B sú ľubovoľné konštanty. Konštanty určíme pomocou okrajových podmienok. Tak dostávame

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}a} + Be^{-\sqrt{-\lambda}a} &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pretože determinant sústavy je v prípade (2.13) rôzny od nuly, je $A = 0$ aj $B = 0$ a riešením úlohy (2.12) je

$$X(x) = 0$$

Potom $u(x,t) = 0$ a toto riešenie nám nevyhovuje, pretože my sme hľadali nenulové riešenie.

b) $\lambda = 0$. Všeobecné riešenie má v tomto prípade tvar

$$X(x) = A + Bx$$

Použitím okrajových podmienok dostaneme

$$A = 0$$
$$A + Ba = 0$$

Teda $A = B = 0$, a opäť dostávame iba nulové riešenie.

c) $\lambda > 0$. Všeobecné riešenie má v tomto prípade tvar

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

Potom z podmienky $X(0) = 0$ dostávame, že $A = 0$ a z podmienky $X(a) = 0$ dostaneme

$$B\sin\sqrt{\lambda}a = 0$$

V prípade $B = 0$ by sme dostali znovu triviálne riešenie, a preto kladieme:

$$\sin\sqrt{\lambda}a = 0$$

čo je splnené za predpokladu, že

$$\sqrt{\lambda}a = n\pi \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

t.j.

$$\lambda := \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \; n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.14}$$

Čísla λ_n, $n = 1,2,\dots$ sa nazývajú *vlastné hodnoty* a im zodpovedajúce funkcie

$$\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

vlastné funkcie (úlohy (2.12)).

Riešenia úlohy (2.12) majú potom tvar

$$X_n(x) = B_n\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.15}$$

Pre $\lambda = \lambda_n$ všeobecné riešenie rovnice (2.9) má tvar

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi c}{a}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{a}t \tag{2.16}$$

kde C_n a D_n sú ľubovoľné konštanty. Potom funkcie

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n\cos\frac{n\pi c}{a}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{a}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

spĺňajú rovnicu (2.1) a OP (2.2), (2.3), pričom sme položili $a_n = B_nC_n$ a $b_n = B_nD_n$.

Pretože rovnica (2.1) je lineárna a homogénna tak aj funkcia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{a}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{a}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.17}$$

je riešením tejto rovnice za predpokladu, že rad rovnomerne konverguje rovnako, ako aj rad, ktorý vznikne dvojnásobným derivovaním jednotlivých jeho členov podľa t a x. Pretože každý člen radu (2.17) spĺňa OP (2.2) a (2.3), tak ich spĺňa aj funkcia $u(x,t)$. Ostali nám ešte začiatočné podmienky (2.3), (2.4), ktoré musia byť splnené. Dosiahneme to výpočtom konštánt a_n a b_n . Zderivujeme rovnosť (2.17)

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{a}\left(- a_n\sin\frac{n\pi c}{a}t + b_n\cos\frac{n\pi c}{a}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.18}$$

Z podmienok (2.4) , (2.5) dostaneme

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.19}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{n\pi c}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{2.20}$$

Na základe viet o konvergencii Fourierových sínusových radov ([4], [6],[10]) rady (2.19), (2.20) rovnomerne konvergujú k funkciám f resp. g na intervale $\langle 0,a\rangle$, ak sú funkcie f, g spojité diferencovateľné a spĺňajú OP $f(0) = f(a) = g(0) = g(a) = 0$. Ak sú uvedené funkcie spojito diferencovateľné a nespĺňajú uvedené OP, vtedy rady konvergujú k f resp. g bodovo na intervale $(0,a)$.

Koeficienty a_n a b_n sú potom dané integrálmi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \end{aligned} \tag{2.21}$$

Teda riešenie ZOU (2.1) - (2.5) je dané radom (2.17), kde koeficienty a_n a b_n sú dané vzťahmi (2.21) .

Rovnica vedenia tepla

Uvažujme homogénnu tyč dĺžky a . Predpokladáme, že tyč je dostatočne tenká a teplo sa v danom časovom okamihu šíri rovnomerne cez jej prierez. Predpokladáme ďalej, že tyč je tepelne izolovaná od vonkajšieho prostredia, jej koniec $x = 0$ sa udržiava na nulovej teplote a druhý koniec $x = a$ je izolovaný tak, že v ňom neprebieha výmena tepla s okolím. Ak rozdelenie teploty v tyči v čase $t = 0$ je dané funkciou $f(x)$, potom rozdelenie teploty v tyči v čase t a bode x je dané riešením začiatočno-okrajovej úlohy

$$
\begin{aligned}
&u_t = ku_{xx}, \ 0 < x < a \ , \ t > 0 \ , \ k > 0 \\
&u(0,t) = 0 \\
&u_x(a,t) = 0 \ , \ t \geq 0 \\
&u(x,0) = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq a
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Tak ako pri rovnici kmitania struny, vyjadríme riešenie rovnice vedenia tepla v tvare

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Podobným postupom ako v predošlej ZOU dostaneme

$$XT' = kX''T$$

čo prepíšeme do tvaru

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda$$

kde $\lambda > 0$ je kladná konštanta. Teda X a T spĺňajú rovnice

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{2.23}$$

$$T' + \lambda kT = 0 \tag{2.24}$$

Z OP dostaneme

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u_x(a,t) = X'(a)T(t) = 0$$

t.j.

$$X(0) = 0 \ , \ X'(a) = 0$$

pre ľubovoľnú funkciu $T(t)$. Tak funkcia $X(x)$ je riešením úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0 \ , \ X'(a) = 0$$

Všeobecné riešenie rovnice (2.23) je

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$$

Z podmienky $X(0) = 0$ máme $A = 0$. Z druhej OP potom máme

$$X'(a) = B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a$$

Pretože hľadáme netriviálne riešenie, musí platiť:

$$\cos \sqrt{\lambda}a = 0$$

odkiaľ

$$\sqrt{\lambda}a = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

a

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} \right)^2 \ , \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

sú vlastné hodnoty a im zodpovedajúce vlastné funkcie majú tvar

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2a}$$

Riešenie rovnice (2.3) potom dostávame v tvare

$$T(t) = Ce^{-\lambda kt}$$

t.j.

$$T_n(t) = C_n e^{-((2n+1)\pi/2a)^2 kt}$$

Teda netriviálne riešenie rovnice vedenia tepla, ktoré spĺňa OP, je

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n e^{-((2n+1)\pi/2a)^2 kt} \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2a}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

kde $a_n = B_n C_n$ sú ľubovoľné konštanty. Formálne vytvoríme rad

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-((2n+1)\pi/2a)^2 kt} \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2a} \tag{2.25}$$

ktorý spĺňa začiatočnú podmienku ak

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2a}$$

t.j.

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2a} \tag{2.26}$$

Teda funkcionálny rad (2.25) je za predpokladu, že rovnomerne konverguje spolu s radmi ktoré vzniknú derivovaním podľa t a dvojnásobným derivovaním podľa x, riešením ZOU (2.22). Podobne, ako napr. v literatúre [2], [3], možno dokázať, že postačujúcou podmienkou na to je, aby funkcia začiatočnej teploty f bola spojito diferencovateľná na intervale $\langle 0,a \rangle$ a spĺňala okrajové podmienky $f(0) = f'(a) = 0$. Poznamenávame, že formálne je rad riešením danej úlohy aj za slabších predpokladov pre funkciu f. Vtedy hovoríme aj o tzv. *zovšeobecnenom*, alebo *slabom riešení*, ktoré sa zavádza aj pri iných začiatočno-okrajových, alebo okrajových úlohách.

Laplaceova rovnica

Uvažujme stacionárne vedenie tepla v tenkej obdĺžnikovej doske, ktorej dve bočné hrany sú tepelne izolované od okolitého prostredia, jedna hrana je udržiavaná pri nulovej teplote a teplota poslednej hrany je predpísaná funkciou $f(x)$. Pretože ide o stacionárne vedenie tepla, v rovnici nebude vystupovať čas. To znamená, že v dvojrozmernej rovnici vedenia tepla

$$u_t = k\,\Delta u$$

uvažujeme $u_t = 0$, t.j. teplota sa nemení s časom. Matematická formulácia tejto okrajovej úlohy je nasledujúca:

$$\Delta u = 0,\ 0 < x < a\ ,\ 0 < y < b$$
$$u(x,0) = f(x)\ ,\ 0 \le x \le a$$
$$u(x,b) = 0\ ,\ 0 \le x \le a \qquad (2.27)$$
$$u_x(0,y) = 0\ ,\ 0 \le y \le b$$
$$u_x(a,y) = 0\ ,\ 0 \le y \le b$$

Riešenie opäť hľadáme v tvare $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Po dosadení do Laplaceovej rovnice a separácii premenných, čo je pre nás teraz už iba rutinná záležitosť, dostávame rovnice pre $X(x)$ a $Y(y)$:

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$Y'' - \lambda Y = 0$$

Pretože OP sú homogénne na okrajoch $x = 0$ a $x = a$ pre $\lambda \ge 0$, dostaneme netriviálne riešenie úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie:

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (2.28)$$

$$X'(0) = X'(a) = 0 \qquad (2.29)$$

Všeobecné riešenie rovnice (2.28) je za predpokladu $\lambda > 0$ v tvare

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$$

odkiaľ

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x$$

Potom použitím okrajových podmienok dostávame

$$0 = X'(0) = B\sqrt{\lambda} \Rightarrow B = 0$$

$$0 = X'(a) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a}\ ;\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

a

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\ X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{a}\ ;\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

sú odpovedajúce vlastné hodnoty a vlastné funkcie. Na rozdiel od okrajových podmienok v predchádzajúcich úlohách je vlastnou hodnotou aj $\lambda_0 = 0$, ktorej zodpovedá konštantná vlastná funkcia $X_0(x) = A_0$.

Riešenie druhej rovnice

$$Y'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0\ ,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

má pre $n = 0$ tvar

$$Y_0'' = 0$$

ktorej riešenie môžeme napísať v tvare

$$Y_0 = C_0 y + D_0$$

Pre $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ riešenie má tvar

$$Y_n(y) = C_n e^{(n\pi/a)y} + D_n e^{-(n\pi/a)y}$$

Formálne vytvoríme rad

$$u(x,y) = a_0 y + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{(n\pi/a)y} + b_n e^{-(n\pi/a)y}) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

kde $a_n = A_n C_n$ a $b_n = A_n D_n$. Potom z okrajových podmienok

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{a} \quad u(x,b) = 0 \quad \text{pre} \quad 0 \le x \le a$$

máme:

$$f(x) = u(x,0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

a

$$0 = u(x,b) = a_0 b + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{(n\pi/a)b} + b_n e^{-(n\pi/a)b}) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

odkiaľ dostávame Fourierove koeficienty funkcie f :

$$b_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x)\, dx; \; a_n + b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx, \; n = 1,2,\ldots$$

resp. funkcie 0 :

$$a_0 b + b_0 = 0, \text{ alebo } a_0 = -\frac{b_0}{b}$$

$$a_n e^{(n\pi/a)b} + b_n e^{-(n\pi/a)b} = 0; \; n = 1, 2, \ldots$$

Ak položíme

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tak

$$a_n = \frac{B_n}{(1 - e^{(2n\pi/a)b})}, \; b_n = -\frac{B_n e^{(2n\pi/a)b}}{(1 - e^{(2n\pi/a)b})}, \; n = 1, 2, \ldots$$

$$b_0 = \frac{1}{2} B_0$$

a riešenie OU môžeme napísať v tvare

$$u(x,y) = \frac{B_0}{2} \frac{b - y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{e^{(n\pi/a)y} - e^{(n\pi/a)(2b-y)}}{1 - e^{(2n\pi/a)b}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

odkiaľ po jednoduchých úpravách vyjadríme riešenie pomocou funkcie sinh v tvare

$$u(x,y) = \frac{B_0}{2} \frac{b - y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{a} (b - y)}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

Takto sme pomocou separácie premenných formálnym spôsobom vyriešili hyperbolickú a parabolickú ZOU, ako aj eliptickú OU. Formálnym spôsobom preto, že zatiaľ sme predpokladali iba to, aby vytvorený rad rovnomerne konvergoval a mal toľko a takých derivácií, koľko si vyžaduje problém, ktorý riešime. V zmysle klasickej definície riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice by sme mali dokázať, že riešenia všetkých troch úloh existujú a sú jediné. Tieto dôkazy, rovnako ako aj otázky konvergencie predchádzajúcich radov, presahujú rámec tohto skrípta a možno ich nájsť v literatúre [1], [2], [3], [13], [19].

CVIČENIA 4.2

V úlohách 1 - 9 riešte ZOU

1. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

   $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t \geq 0$

   $u(x,0) = 3 \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

   $u_t(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

2. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$

   $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t \geq 0$

   $u(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$

   $u_t(x,0) = x \sin x$, $0 \leq x \leq 1$

3. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

   $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $t \geq 0$

   $u(x,0) = x + \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

   $u_t(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

4. $u_t = 4\, u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$

   $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t \geq 0$

   $u(x,0) = x^2(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$

5. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$

   $u(0,t) = u_x(2,t) = 0$, $t \geq 0$

   $u(x,0) = x$, $0 \leq x \leq 2$

6. $u_t = k u_{xx}$, $0 < x < a$, $t > 0$

   $u(0,t) = 0$, $u(a,t) = 0$, $t \geq 0$

   $u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2a}$, $0 \leq x \leq a$

7. Homogénna struna upevnená na koncoch $x = 0$, $x = a$ má v čase $t = 0$ tvar

$$u(x,0) = \frac{16}{5}h\left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right)\right]$$

kde $h > 0$ je dostatočne malé číslo, začne kmitať bez začiatočnej rýchlosti. Riešte úlohu o kmitaní struny t.j. riešte ZOU

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \ , \quad 0 < x < a \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{16}{5}h\left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right)\right] \ , \quad 0 \leq x \leq a$$

$$u_t(x,0) = 0 \ , \quad 0 \leq x \leq a$$

8. Homogénna struna upevnená na koncoch $x = 0$, $x = a$ má v čase $t = 0$ tvar paraboly symetrickej vzhľadom na priamku $x = \frac{1}{2}$ a začne kmitať bez začiatočnej rýchlosti. Riešte úlohu o kmitaní struny t.j. riešte ZOU

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \; , \; 0 < x < a \; , \; t > 0$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \; , \; t \geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{4hx(a - x)}{a^2} \; , \; 0 \leq x \leq a$$

$$u_t(x,0) = 0 \; , \; 0 \leq x \leq a$$

9. Metódou separácie premenných riešte ZOU pre telegrafnú rovnicu

$$u_{tt} + au_t + bu = c^2 u_{xx} \; , \; 0 < x < 1 \; , \; t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \; , \; t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) \; , \; 0 \leq x \leq 1$$

$$u_t(x,0) = 0 \; , \; 0 \leq x \leq 1$$

10. Daná je tenká homogénna tyč dĺžky a izolovaná od vonkajšieho prostredia so začiatočnou teplotou

$$f(x) = \frac{cx(a - x)}{a^2}$$

Konce tyče sú udržiavané pri nulovej teplote. Riešte úlohu o vedení tepla v tyči:

$$u_t = ku_{xx} \; , \; 0 < x < a \; , \; t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \; , \; u(a,t) = 0 \; , \; t \geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{cx(a - x)}{a^2} \; , \; 0 \leq x \leq a$$

Metódou separácie premenných riešte okrajové úlohy:

11. $\Delta u = 0 \; , \; 0 < x < \pi \; , \; 0 < y < \pi$

$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \; , \; 0 < y < \pi$

$u(x,\pi) = 0 \; , \; u(x,0) = \sin^2 x \; , \; 0 < x < \pi$

12. $\Delta u = 0 \; , \; 0 < x < \pi \; , \; 0 < y < \pi$

$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \; , \; 0 < y < \pi$

$u(x,\pi) = 0 \; , \; u(x,0) = x^2 \; , \; 0 < x < \pi$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.2

1. $u(x,t) = 3 \cos ct \sin x$

2. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{c} \frac{2 \sin 1}{n^2\pi^2 - 1} + \frac{4n\pi((-1)^n \cos 1 - 1)}{c(n^2\pi^2 - 1)^2} \right] \sin n\pi ct \sin n\pi x$

3. $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{2n+3}\right)^2 - \left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\right]\times\right.$$
$$\times \cos\frac{2n+1}{2}ct\ \sin\frac{2n+1}{2}x$$

4. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\pi^3}\,[2(-1)^{n+1} - 1]e^{-4n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

5. $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{(2n+1)\pi}\right)^2 e^{-((2n+1)\pi/4)^2 t}\sin\frac{2n+1}{4}\pi x$$

6. $$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\,e^{-(n\pi/a)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

7. $$u(x,t) = \frac{1536ah}{5\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\cos\frac{(2n+1)\pi ct}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}$$

8. $$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi ct}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a},\ \text{kde}$$

$h = u(\frac{a}{2},0)$.

9. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\ \text{kde}\quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

a ak označíme

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[a^2 - 4\left(b + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}\right)\right]^{1/2}$$
$$\beta = \frac{1}{2}\left[4\left(b + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}\right) - a^2\right]^{1/2}$$

tak

$$T_n(t) = \begin{cases} e^{-at/2}\left(\cosh\alpha t + \frac{a}{2\alpha}\sinh\alpha t\right) & \text{pre } \alpha^2 > 0 \\ e^{-at/2}\left(1 + \frac{at}{2}\right) & \text{pre } \alpha^2 = 0 \\ e^{-at/2}\left(\cos\beta t + \frac{a}{2\beta}\sin\beta t\right) & \text{pre } \beta^2 > 0 \end{cases}$$

10. $$u(x,t) = \frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-((2n+1)\pi/a)^2 kt}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}$$

11. $$u(x,y) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(2n-1)(\pi-y)}{(4n^2-1)(2n-3)\sinh(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x$$

12. $$u(x,y) = \frac{1}{3}\pi(\pi - y) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sinh n(\pi-y)}{n^2\sinh n\pi}\cos nx\ .$$

4.3 STURMOVA-LIOUVILLEOVA ÚLOHA A BESSELOVE FUNKCIE

V predchádzajúcej časti sme hľadali riešenia ZOU a OU metódou separácie premenných. V každej úlohe sme hľadali nenulové riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice $X''+\lambda X = 0$ spĺňajúce niektoré z okrajových podmienok $X(0) = X(a) = 0$, $X(0) = X'(a) = 0$, $X'(0) = = X'(1) = 0$. Vlastnosti riešení uvedených úloh si zachovávajú aj riešenia nasledujúcej všeobecnejšej úlohy

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx} \right) + [\lambda\rho(x) - q(x)]X = 0 \ , \ 0 < x < a \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha X(0) + \beta X'(0) &= 0 \\ \gamma X(a) + \delta X'(a) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

pričom predpokladáme, že $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ na $\langle 0,a\rangle$. Funkcia p je spojito diferencovateľná a ρ, q sú spojité. Konštanty α, β (γ , δ) nie sú obe rovné nule.

Hodnoty parametra λ, pre ktoré má úloha (3.1), (3.2) netriviálne riešenie, sa nazývajú *vlastné hodnoty* a im zodpovedajúce riešenia sú *vlastné funkcie*. Úloha hľadania vlastných hodnôt a vlastných funkcií sa nazýva Sturmova-Liouvilleova úloha.

Ak $\lambda = q(x) = 0$, potom rovnica (3.1) vyjadruje vedenie tepla v nehomogénnej tyči s funkciou tepelnej vodivosti $p(x)$.

Pri riešení ZOU kmitania struny sme riešili úlohu

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \ 0 < x < a$$
$$X(0) = 0$$
$$X(a) = 0$$

Jej vlastné hodnoty sú

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$$

a im zodpovedajúce vlastné funkcie

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots .$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že vlastné funkcie $\sin\frac{n\pi x}{a}$ spĺňajú rovnosť

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{ak } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{ak } m = n \end{cases}$$

Hovoríme, že funkcie $\{\sin\frac{n\pi x}{a}\}$ sú *ortogonálne* na intervale $(0,a)$. Pripomeňme si, že Fourierov rad každej integrovateľnej funkcie $f:\langle 0.a\rangle \longrightarrow R$ podľa systému $\{\sin\frac{n\pi x}{a}\}$ má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a} \ , \ c_n = \int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\, dx, \ n = 1,2,\dots$$

Uvedený rad konverguje v strede na $\langle 0,a\rangle$ k funkcii f , t.j.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a [f(x) - s_n(x)]^2 dx = 0 \ , \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin \frac{k\pi x}{a}$$

Ak funkcia f je na intervale $\langle 0,a\rangle$ spojite diferencovateľná a spĺňa okrajové podmienky $f(0) = f(a) = 0$, vtedy daný Fourierov rad k nej konverguje rovnomerne na $\langle 0,a\rangle$.

Tieto vlastnosti môžeme zovšeobecniť aj na vlastné hodnoty a vlastné funkcie Sturmovej-Liovilleovej úlohy (3.1), (3.2).

Najprv rozšírime vyššie uvedený pojem ortogonality na ortogonalitu vzhľadom na funkciu ρ .

Definícia 4.1

Postupnosť integrovateľných funkcií $X_n:\langle 0,a\rangle \longrightarrow R$ sa nazýva *ortogonálna s váhou* ρ, ak

$$\int_0^a \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx \ \begin{cases} = 0, & \text{pre } k \neq n \\ > 0, & \text{pre } k = n \end{cases}$$

Hodnotu

$$\|X_n\| = \left[\int_0^a \rho(x)X_n^2(x)dx \right]^{1/2}$$

nazývame normou funkcie X_n (s váhou $\rho(x)$).

Ak $f : \langle 0,a\rangle \to R$ je integrovateľná funkcia, potom funkcionálny rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x), \quad c_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^a \rho(x)f(x)X_k(x)dx$$

sa nazýva *Fourierov rad* funkcie f podľa ortogonálneho systému $\{X_k\}$ s váhou ρ. Hovoríme, že Fourierov rad funkcie f *konverguje v strede* k funkcii f na intervale $\langle 0,a\rangle$ s váhou ρ, ak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \rho(x)[f(x) - s_n(x)]^2 dx = 0$$

kde

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(x)$$

je n-tý čiastočný súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$.

Nasledujúca veta zovšeobecňuje už spomínané vlastnosti vlastných hodnôt a vlastných funkcií z predchádzajúcej časti.

Veta 4.1

a) Existuje postupnosť vlastných hodnôt $\{\lambda_n\}$ úlohy (3.1), (3.2), pre ktoré platí

$$\min_{x\in[0,a]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots; \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

b) Zodpovedajúca postupnosť vlastných funkcií $\{X_n\}$ tvorí ortogonálny systém na intervale $\langle 0,a\rangle$ s váhou ρ .

c) Fourierov rad každej funkcie f podľa ortogonálneho systému $\{X_n\}$ s váhou ρ konverguje v strede k f na $\langle 0,a\rangle$ s váhou ρ.

d) Ak funkcia f je spojito diferencovateľná a spĺňa okrajové podmienky (3.2), potom uvedený rad absolútne a rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0,a\rangle$.

Vetu nebudeme dokazovať, jej dôkaz vyžaduje hlbšie matematické znalosti. Dôkaz možno nájsť napr v knihách [1], [19].

Príklad 4.1

Nájdite rozdelenie teploty v tyči dĺžky a, ktorej povrch je tepelne izolovaný od okolitého prostredia, koniec $x = 0$ sa udržiava pri nulovej teplote a druhý koniec $x = a$ vyžaruje teplo voľne do okolitého prostredia s nulovou teplotou. Začiatočné rozdelenie teploty v tyči je dané funkciou $f(x)$.

R i e š e n i e. Rozdelenie teploty u je riešením ZOU

$$u_t = k\, u_{xx} \ ,\ 0 < x < a \ ,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \ ,\ 0 \le x \le a$$

$$u(0,t) = 0 \ ,\ t > 0$$

$$hu(a,t) + u_x(a,t) = 0 \ ,\ t > 0,\ h > 0$$

Riešenie $u(x,t)$ vyjadríme najprv v tvare

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Obvyklým spôsobom dostaneme rovnice

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T' + \lambda k T = 0$$

kde $\lambda > 0$ je separačná konštanta. Rovnica

$$X'' + \lambda X = 0$$

s podmienkami

$$X(0) = 0 \ ,\ hX(a) + X'(a) = 0$$

je Sturmovým-Liouvilleovým systémom, ktorý má podľa vety 4.1 spočítateľne mnoho vlastných hodnôt λ_n a im zodpovedajúce vlastné funkcie $X_n(x)$. Riešením tejto úlohy s podmienkou

$$X(0) = 0$$

je funkcia

$$X(x) = B \sin \sqrt{\lambda} x$$

kde B je konštanta. Ak dosadíme toto riešenie do druhej podmienky, dostaneme rovnosť

$$h \sin \sqrt{\lambda} a + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a = 0 \quad \text{ak} \quad B \ne 0$$

ktorú môžeme prepísať do tvaru

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} a = - \sqrt{\lambda}/h$$

Ak zavedieme substitúciu $\eta = \sqrt{\lambda} a$ dostaneme rovnicu

$$\operatorname{tg} \eta = - \alpha\eta ,$$

kde $\alpha = \frac{1}{ha}$. Táto rovnica má postupnosť koreňov $\{\eta_n\}$, ktoré sú x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií $\operatorname{tg} \eta$, $-\alpha\eta$. Každému koreňu η_n zodpovedá vlastná hodnota

$$\lambda_n = \frac{\eta_n^2}{a^2} , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Teda existuje spočítateľne mnoho vlastných hodnôt

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

pričom

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

Zodpovedajúce vlastné funkcie sú

$$X_n(x) = B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

Riešenie druhej rovnice dostaneme v tvare

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n kt}$$

Konečné riešenie budeme hľadať v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n kt} \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

Podľa vety 4.1 vlastné funkcie $\sin \sqrt{\lambda_n} x$ tvoria ortogonálny systém na intervale $\langle 0,a \rangle$ (s váhou $\rho = 1$). Koeficienty a_n určíme zo začiatočnej podmienky

$$u(x,0) = f(x)$$

Ak predpokladáme, že funkcia f je integrovateľná na $\langle 0,a \rangle$, potom ju možno rozvinúť do radu podľa vlastných funkcií :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

odkiaľ

$$a_n = \frac{\int_0^a f(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \, dx}{\int_0^a \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x \, dx}$$

Besselova rovnica a Besselove funkcie

Pri riešení ZOU alebo OU s radiálnou alebo cylindrickou symetriou metódou separácie premenných sa často stretávame s úlohou, keď treba riešiť Besselovu rovnicu:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \ x > 0 \qquad (3.3)$$

kde ν je nezáporné reálne číslo. Ohraničené v okolí bodu 0 riešenie rovnice (3.3) možno nájsť v tvare zovšeobecneného moc- ninového radu

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{s+n} \qquad (3.4)$$

Ak dosadíme rad (3.4) do rovnice (3.3) a porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách premennej x, dostaneme systém rekurentných vzťahov, z ktorých máme:

$$s = \pm \nu \ , \ a_{2k-1} = 0 \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Po zvolení $s = \nu$ dostávame

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{\nu}\Gamma(\nu + 1)}{2^{2k} k!\Gamma(\nu + k + 1)} a_0 \ , \ k = 1, 2, \ldots$$

kde $\Gamma : (0,\infty) \to R$ je *gama funkcia* definovaná parametrickým integrálom ([1], [10])

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Ak ν je prirodzené číslo potom platí:

$$\Gamma(n + 1) = n! \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0! = 1$$

Obvykle sa volí

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu + 1)}$$

a zodpovedajúce riešenie sa nazýva *Besselova funkcia prvého druhu rádu* ν a označuje $J_{\nu}(x)$, pričom na základe rekurentných vzťahov pre koeficienty platí

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

Uvedieme (bez dôkazu) niekoľko jednoduchých rekurentných vzťahov, ktoré spĺňajú Besselove funkcie

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)$$
$$x J_{\nu}'(x) = x J_{\nu-1}(x) - \nu J_{\nu}(x)$$
$$x J_{\nu}'(x) = \nu J_{\nu}(x) - x J_{\nu+1}(x)$$

Z ďalších vlastností Besselových funkcií uvedieme pre nás dôležitú vlastnosť rozloženia ich koreňov.

Tvrdenie 4.1 ([1], [19]).

Každá Besselova funkcia má nekonečne mnoho nulových bodov, ktoré sú jednoduché okrem bodu $x = 0$, ktorý môže byť aj viacnásobným nulovým bodom.

Podobne, ako sme formulovali Sturmovu-Liovilleovu úlohu pre rovnicu (3.1), sformulujeme túto úlohu aj pre (zovšeobecnenú) Besselovu rovnicu s parametrom

$$\lambda x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, \ x > 0 \tag{3.5}$$

ktorú možno vyjadriť aj v tvare

$$(xy')' + \lambda xy - \frac{\nu^2}{x} y = 0, \ x > 0$$

Poznámka 4.1

Tvrdenia vety 4.1 platia za určitých predpokladov aj pre Sturmove-Liouvilleove úlohy na neohraničených intervaloch, alebo s funkciou $p(x)$ rovnou nule v jednom alebo v oboch krajných bodoch intervalu $\langle 0,a\rangle$. Okrajové podmienky v takýchto bodoch sa nahrádzajú podmienkami ohraničenosti v ich okolí.

Uvažujme Sturmovu-Liouvilleovu úlohu pre Besselovu rovnicu

$$(xy')' + \lambda xy - \frac{\nu^2}{x} y = 0 \ , \ 0 < x < a \tag{3.6}$$

s podmienkami

$$y(x) \text{ je ohraničená pre } x \to 0^+ \tag{3.7}$$

$$y(a) = 0 \tag{3.8}$$

Porovnaním rovníc (3.6), (3.5) s pôvodnou Besselovou rovnicou (3.1) vidíme, že vlastné funkcie tejto úlohy majú tvar

$$y(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$$

Podmienka (3.8) implikuje, že hľadané riešenie musí vyhovovať rovnici

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Ak μ_n^ν sú korene rovnice

$$J_\nu(\mu_n^\nu) = 0 \ , \ n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.9}$$

potom

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^\nu}{a} \right)^2 \ , \ n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.10}$$

sú vlastné hodnoty a

$$y_n(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right) \ , \ n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.11}$$

im zodpovedajúce vlastné funkcie úlohy (3.6), (3.7), (3.8).

Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom vlastnosti ortogonality a úplnosti systému vlastných funkcií z vety 4.1.

Tvrdenie 4.2

Nech $\nu \geq 0$ je ľubovoľné. Ak μ_n^ν, $n = 1, 2, \dots$; sú riešenia rovnice

$$J_\nu(\mu_n^\nu) = 0$$

potom

$$\int_0^a xJ_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right)J_\nu\left(\frac{\mu_m^\nu}{a} x \right)dx = 0 \quad \text{pre} \quad m \neq n$$

t.j. funkcie $\{J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x)\}$ sú ortogonálne s váhou x.

Ak $n = m$, vtedy

$$\left\| J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right) \right\|^2 = \int_0^a x\left[J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{a} x \right)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{a^2}{2} [J'_\nu(\mu_n^\nu)]^2 = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\mu_n^\nu)]^2$$

Fourierov rad každej integrovateľnej funkcie $f:\langle 0,a\rangle \to R$ podľa ortogonálneho systému $\{J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x)\}$ konverguje v strede s váhou x na intervale $(0,a)$ k funkcii f.

CVIČENIA 4.3

V úlohách 1 - 4 nájdite vlastné hodnoty a vlastné funkcie nasledujúcich Sturmových-Liouvilleových úloh:

1. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$
2. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X'(1) = 0$
3. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = X'(\pi) = 0$
4. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(1) + X'(1) = 0$
5. Nájdite rozvoj funkcie $1 - x^2$ na intervale $0 < x < 1$ podľa vlastných funkcií $J_0(\sqrt{\lambda_k^0})$ Sturmovej-Liouvilleovej úlohy

$$(xy')' + \lambda xu = 0 \ , \ 0 < x < 1$$
$$u(1) = 0 \ , \ u \text{ je ohraničená}$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.3

1. $\lambda_n = n^2$, $X_n(x) = \sin nx$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$
2. $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2$, $X_n(x) = \sin \frac{2n-1}{2}\pi x$, $n = 1, 2, 3, \dots$
3. $\lambda_n = n^2$, $X_n(x) = \cos nx$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$
4. $\lambda_n = \mu_n^2$, $X_n(x) = \sin \mu_n x$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$, pričom μ_n sú riešenia rovnice $\operatorname{tg} \mu_n = - \mu_n$.
5. $1 - x^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\sqrt{\lambda_k^0})\ J_0(\sqrt{\lambda_k^0}\, x)}{\lambda_k^0\ J_1^2(\sqrt{\lambda_k^0})}$

Návod: použite vzťah $\frac{d}{dx}[x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x)$ a integráciu per partes.

4.4 ÚLOHY NA KRUHU

V tejto časti sa budeme zaoberať riešením úloh s Laplaceovým operátorom na kruhu alebo jeho časti.

Laplaceov operátor v kartézskych súradniciach má tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

a ak zavedieme polárne súradnice

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi$$

môžeme ho vyjadriť v tvare

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Riešme Dirichletovu okrajovú úlohu na kruhu s polomerom a :

$$\Delta u = 0\ ,\ x^2 + y^2 < a^2 \tag{4.1}$$

$$u(x,y) = f(x,y)\ ,\ x^2 + y^2 = a^2 \tag{4.2}$$

Po prenásobení Laplaceovho operátora v polárnych súradniciach funkciou r^2, má OÚ (4.1), (4.2) tvar

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0\ ,\ 0 \le r < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \tag{4.3}$$

$$u(a,\varphi) = f(\varphi)\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \tag{4.4}$$

$$u(r,0) = u(r,2\pi)\ ,\ 0 < r < a \tag{4.5}$$

Podmienka (4.5) vyjadruje spojitosť riešenia, rovnako predpokladáme aj spojitosť funkcie f na jeho hranici, a teda aj splnenie vzťahu $f(0) = f(2\pi)$.

Hľadajme riešenie rovnice (4.3) v tvare $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Metódou separácie premenných dostaneme

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

odkiaľ

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{4.6}$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \tag{4.7}$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \tag{4.8}$$

Riešme najprv úlohu (4.7), (4.8). Aby existovalo jej <u>nenulové</u> riešenie, musí byť $\lambda \ge 0$. Ak $\lambda = 0$, riešením potom je ľubovoľná konštanta

$$\Phi_0(\varphi) = A_0$$

Ak $\lambda > 0$, všeobecné riešenie rovnice (4.6) má tvar

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi$$

a z podmienky (4.8) dostávame

$$\sqrt{\lambda} = n \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dosadením hodnôt $\lambda := \lambda_n = n^2$ do rovnice (4.6) dostaneme rovnice

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0 \tag{4.9}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že všeobecné riešenie rovníc (4.8) má tvar

$$R_0(r) = C + D \ln r \;, \; r > 0 \tag{4.10}$$

$$R_n(r) = Cr^n + Dr^{-n} \;, \; r > 0 \;, \; n = 1, 2, \ldots \tag{4.11}$$

(Rovnica (4.9) je typ Eulerovej rovnice a substitúciou $r = e^t$ ju možno transformovať na ODR 2. rádu s konštantnými koeficientmi) ([10], [18]).

Aby riešenie pôvodnej Laplaceovej rovnice bolo ohraničené v kruhu polomeru a, musí mať riešenie rovnice (4.8) vlastnú limitu pre $r \to 0+$, a teda v (4.10) a (4.11) kladieme $D = 0$.

Potom riešenia rovnice (4.3) dostávame v tvare

$$u_n(r,\varphi) = Cr^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Riešenie okrajovej úlohy (4.3), (4.4), (4.5) vyjadríme v tvare radu

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{4.12}$$

Z okrajovej podmienky (4.4) dostaneme vzťahy

$$f(\varphi) = u(a,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

odkiaľ z teórie Fourierových trigonometrických radov

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi$$

$$a_n = \frac{1}{a^n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \;, \; b_n = \frac{1}{a^n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi$$

Riešenie danej úlohy má potom tvar

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \; +$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\left(\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \right) \cos n\varphi + \left(\int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \right) \sin n\varphi \right]$$

Druhá úloha, ktorou sa budeme zaoberať, je úloha o priečnom kmitaní tenkej kruhovej elastickej membrány s polomerom a, keď uvažujeme iba osovo-symetrický ohyb. Laplaceov operátor nezávisí v tomto prípade od premennej φ, to znamená, že jeho tvar je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Ak predpokladáme, že membrána v čase $t = 0$ má tvar, ktorý je daný funkciou $f(r)$, začne kmitať s nulovou začiatočnou rýchlosťou a na okraji $r = a$ je pevná, potom ZOÚ pre jej pohyb môžeme sformulovať takto:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad r < a, \quad t > 0\\
&u(r,0) = f(r), \quad 0 \le r \le a\\
&u_t(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le a\\
&u(a,t) = 0, \quad t \ge 0\\
&\lim_{r\to 0^+} u(r,t) < \infty
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Posledná podmienka znamená, že vyžadujeme, aby riešenie bolo v bode $r = 0$ ohraničené. Riešenie opäť vyjadríme najprv v tvare

$$u(r,t) = R(r)T(t)$$

Po dosadení do vlnovej rovnice dostaneme:

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda$$

a ďalej

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{4.14}$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \tag{4.15}$$

Rovnica (4.14) môže byť vyjadrená v tvare

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + \lambda rR = 0 \tag{4.16}$$

a spolu s podmienkami

$$R(a) = 0 \tag{4.17}$$

$$\lim_{r\to 0} R(r) < \infty \tag{4.18}$$

dostaneme Sturmovu-Liovilleeovu úlohu pre Besselovu rovnicu nultého rádu. Z predchádzajúcej časti vieme, že jej riešením je postupnosť vlastných hodnôt

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.19}$$

a vlastných funkcií

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.20}$$

kde J_0 je Besselova funkcia rádu 0 a

$$J_0(\mu_n^0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

pričom

$$0 < \mu_1^0 < \mu_2^0 < \mu_3^0 < \dots$$

Dosadením $\lambda = \lambda_n$ do (4.15) dostaneme rovnice

$$T_n'' + \lambda_n c^2 T_n = 0 \,,\; \lambda_n > 0,\; n = 1,\, 2,\, \dots \tag{4.21}$$

Všeobecné riešenie rovnice (4.21) je potom vzhľadom na (4.19)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct + B_n \sin \frac{\mu_n^0}{a} ct$$

a riešenie ZOÚ (4.13) má tvar radu

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right)\left(A_n \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct + B_n \sin \frac{\mu_n^0}{a} ct\right) \end{aligned} \tag{4.22}$$

za predpokladu, že rad konverguje. Derivovaním radu (4.22) podľa t dostaneme:

$$u_t(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right)\left(-A_n \frac{\mu_n^0}{a} \sin \frac{\mu_n^0}{a} ct + B_n \frac{\mu_n^0}{a} \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct\right)$$

Z podmienky $u_t(r,0) = 0$ vyplýva $B_n = 0$. Riešenie má potom tvar

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right) \cos \frac{\mu_n^0}{a} ct \tag{4.23}$$

Koeficienty A_n určíme zo začiatočnej podmienky

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right)$$

odkiaľ

$$A_n = \frac{\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right) dr}{\int_0^a r \left[J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right)\right]^2 dr} = \frac{2\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n^0}{a} r \right) dr}{a^2 \; [J_1(\mu_n^0)]^2} \tag{4.24}$$

Potom riešenie úlohy (4.13) je dané radom (4.23) s koeficientmi (4.24).

Integrály vo formule pre koeficienty A_n možno vyjadriť analyticky len pre niektoré špeciálne typy funkcií f , vo všeobecnosti treba pri výpočte použiť niektorú numerickú metódu. Hodnoty Besselovej funkcie J_0 možno nájsť v tabuľkách Besselových funkcií.

CVIČENIA 4.4

1. Metódou separácie premenných nájdite riešenie ZOÚ pre rovnicu kmitania kruhovej membrány s polomerom R, ktorá je upevnená na okraji, v čase $t = 0$ má tvar rotačného paraboloidu a začne kmitať s nulovou začiatočnou rýchlosťou.

Matematická formulácia ZOÚ je

$$u_{tt} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad r < R, \; t > 0$$

$$u(r,0) = A\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad 0 \le r \le R$$

$$u_t(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le R$$

$$u(R,t) = 0, \quad t \ge 0$$

$$\lim_{r \to 0+} u(r,t) < \infty$$

2. Metódou separácie premenných nájdite riešenie ZOÚ pre rovnicu kmitania kruhovej membrány s polomerom R, upevnenej na okraji a kmitajúcej v prostredí, odpor ktorého je úmerný jej rýchlosti. Začiatočný tvar membrány je daný funkciou $\varphi(r)$ a začne kmitať s nulovou začiatočnou rýchlosťou.

Matematická formulácia ZOÚ je

$$u_{tt} + 2hu_t = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1\partial u}{r\partial r} \right), \quad r < R, \; t > 0 \quad (h \text{ je malé číslo})$$

$$u(0,t) \text{ je konečná}, \quad u(R,t) = 0$$

$$u(r,0) = \varphi(r), \quad 0 \le r \le R$$

$$u_t(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le R$$

3. Nájdite rozdelenie teploty vo vnútri nekonečného kruhového valca s polomerom R, keď začiatočná teplota valca je rovná $u(r,0) = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ a bočná plocha valca sa udržiava pri nulovej teplote.

Matematická formulácia ZOÚ je

$$u_t = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \; t > 0$$

$$u(r,t) \text{ ohraničená}, \quad u(R,t) = 0$$

$$u(r,0) = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad 0 \le r \le R$$

4. Nájdite riešenie Laplaceovej rovnice vnútri kruhového výseku $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le \alpha$, ktoré spĺňa OP

$$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \quad u(R,\varphi) = A\varphi$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.4

1. $u(r,t) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n}{R} ct$, kde μ_n sú korene rovnice $J_0(\mu_n) = 0$

2. $u(r,t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ht}\left(\cos \alpha_n t + \frac{h}{\alpha_n} \sin \alpha_n t\right) \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R s\varphi(s) J_0\left(\frac{\mu_n s}{R}\right) ds$

kde μ_n sú korene rovnice $J_0(\mu_n) = 0$ a $\alpha_n = \left(\frac{c^2\mu_n^2}{R^2} - h^2\right)^{1/2}$

3. $u(r,t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-(\mu_n c/R)^2 t}$, kde μ_n sú korene rovnice $J_0(\mu_n) = 0$.

4. $u(r,\varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{r}{R}\right)^{n\pi/\alpha} \frac{\sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n}$. Návod: zaveďte polárne súradnice.

4.5 ÚLOHY NA OBDĹŽNIKU

Už v predchádzajúcej časti 4.4 sme skúmali eliptickú úlohu s dvoma priestorovými premennými a hyperbolickú úlohu s dvoma priestorovými a jednou časovou premennou. V prípadoch prvej úlohy sme nemali žiadne ťažkosti so separáciou dvoch premenných, potrebovali sme iba vyriešiť trochu odlišnú úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie. V druhom prípade nám situáciu zjednodušilo to, že sme sa obmedzili iba na osovosymetrickú úlohu, a tak sme vlastne zredukovali dve priestorové premenné na jednu - polomer kruhu. V tejto časti budeme riešiť obdobu Sturmovej-Liouvilleovej úlohy na obdĺžniku, a nie na intervale ako doteraz. Táto úloha je dôležitá pri riešení ZOÚ hyperbolického a parabolického typu s dvoma priestorovými premennými a jednou časovou premennou na obdĺžnikových oblastiach.

Skúmajme teda úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie pre Laplaceov operátor na obdĺžniku $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle$.

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \tag{5.1}$$

pričom $\lambda > 0$ s podmienkami:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 \ , \ 0 \le y \le b \\ u(a,y) &= 0 \ , \ 0 \le y \le b \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \ , \ 0 \le x \le a \\ u(x,b) &= 0 \ , \ 0 \le x \le a \end{aligned} \tag{5.3}$$

Rovnica (5.1) sa nazýva (homogénna) Helmholtzova rovnica. Úlohu (5.1)-(5.3) budeme riešiť metódou separácie premenných. Riešenie hľadáme v tvare

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

a po dosadení do rovnice (5.1) dostaneme:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu$$

kde $\mu > 0$. Teda musíme vyriešiť Sturmovu-Liovilleovu úlohu

$$X'' + \mu X = 0$$

s podmienkami

$$X(0) = 0 \ , \ X(a) = 0$$

Jej riešením je množina vlastných hodnôt

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 , \ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

a im zodpovedajúcich vlastných funkcií

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi x}{a}$$

Ostáva nám ešte vyriešiť druhú rovnicu

$$\frac{Y''}{Y} = -(\lambda - \mu_k)$$

Nech $\gamma = \lambda - \mu_k > 0$. Riešime teda Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$Y'' + \gamma Y = 0$$

$$Y(0) = 0 \ , \ Y(b) = 0$$

ktorej riešením je množina vlastných hodnôt:

$$\gamma_n = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \ , \ n = 1, 2, 3, \dots$$

a im zodpovedajúcich vlastných funkcií

$$Y_n(y) = B_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Tak dostávame, že

$$\lambda = \lambda_{kn} = \mu_k + \gamma_n = \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

t.j.

$$\lambda_{kn} = \pi^2 \left[\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \ , \ k = 1, 2, \dots \ , \ n = 1, 2, \dots$$

sú vlastné hodnoty a

$$u_{kn}(x,y) = c_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \ , \ k = 1, 2, \dots \ , \ n = 1, 2, \dots$$

($c_{kn} = A_k B_n$) zodpovedajúce vlastné funkcie.

Druhý problém, ktorý budeme riešiť, je dvojrozmerný problém vedenia tepla v tenkej obdĺžnikovej doske. Uvažujme obdĺžnikovú dosku so stranami dĺžky a , b , ktorá je tepelne izolovaná od svojho okolia na stranách $x = 0$ a $x = a$. Ostatné dve strany sa udržiavajú pri nulovej teplote. Nech začiatočné rozdelenie teploty v doske je dané funkciou $f(x,y)$. Hľadáme riešenie ZOÚ:

$$u_t = K\Delta u \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \ , \ t > 0 \tag{5.4}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y) \ , \ 0 \le x \le a \ , \ 0 \le y \le b \tag{5.5}$$

$$u_x(0,y,t) = 0 \tag{5.6}$$

$$u_x(a,y,t) = 0 \tag{5.7}$$

$$u(x,0,t) = 0 \tag{5.8}$$

$$u(x,b,t) = 0 \tag{5.9}$$

Danú úlohu budeme riešiť metódou separácie premenných. Pretože hľadaná funkcia $u(x,y,t)$ je funkciou dvoch priestorových a jednej časovej premennej, riešenie budeme hľadať v tvare

$$u(x,y,t) = U(x,y)T(t)$$

Po dosadení do rovnice (p.4) dostaneme

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{T'}{KT} = -\lambda$$

kde $\lambda > 0$. Odkiaľ dostaneme dve rovnice

$$T' + \lambda K T = 0 \tag{5.10}$$

$$\Delta U + \lambda U = 0 \tag{5.11}$$

Úloha (5.11) s podmienkami:

$$U_x(0,y) = 0 \ , \ U_x(a,y) = 0$$

$$U(x,0) = 0 \ , \ U(x,b) = 0$$

je podobná s predchádzajúcou úlohou, túto úlohu nebudeme podrobne riešiť, čitateľ sa môže podobným spôsobom ako v predchádzajúcej úlohe presvedčiť, že

$$\lambda_{kn} = \pi^2\left[\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \ , \ k = 0, 1, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

sú vlastné hodnoty a

$$u_{kn}(x,y) = a_{kn}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \ , \ k = 0, 1, \ldots , n = 1, 2, \ldots$$

sú zodpovedajúce vlastné funkcie. Dosadením $\lambda = \lambda_{kn}$ do (5.10) dostávame riešenie rovnice (5.10) v tvare

$$T_{kn}(t) = C\, e^{-[(k/a)^2+(n/b)^2]\pi^2 K t}$$

Potom riešenie rovnice vedenia tepla na obdĺžniku, ktoré spĺňa okrajové podmienky (5.5) - (5.9), môžeme napísať v tvare

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} e^{-[(k/a)^2+(n/b)^2]\pi^2 K t}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{5.12}$$

(5.12) je dvojitý Fourierov rad, ktorého koeficienty sú:

$$a_{0n} = \frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy \tag{5.13}$$

a pre $k \geq 1$

$$a_{0n} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy \tag{5.14}$$

Teda riešenie rovnice vedenia tepla v obdĺžniku je dané vzťahom (5.12) s koeficientmi (5.13) a (5.14).

CVIČENIA 4.5

1. Metódou separácie premenných riešte ZOÚ kmitania štvorcovej membrány, votknutej po svojom obvode, ktorá v čase $t = 0$ má tvar $Axy(b - x)(b - y)$ a začne kmitať bez začiatočnej rýchlosti. Matematická formulácia tohto problému je takáto:

$$u_{tt} = c^2\Delta u \ , \ 0 < x < b \ , \ 0 < y < b \ , \ t > 0$$

$$u(0,y,t) = u(b,y,t) = 0 \ , \ 0 \leq y \leq b \ , \ t > 0$$

$$u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \ , \ 0 \leq x \leq b \ , \ t > 0$$

$$u(x,y,0) = Axy(b - x)(b - y)$$
$$u_t(x,y,0) = 0$$

2. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné funkcie OÚ:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ , \ 0 < x < l \ , \ 0 < y < h$$
$$u(0,y) = u(l,y) = 0 \ , \ 0 \le y \le h$$
$$u(x,0) = 0 \ , \ u(x,h) - \alpha u_y(x,h) = 0 \ , \ 0 \le x \le l \ , \ \alpha = \text{const}$$

3. Riešte ZOÚ:

$$u_t = K\Delta u \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$$
$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \ , \ 0 \le y \le b$$
$$u(x,0,t) = u_y(x,b,t) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$$
$$u(x,y,0) = x(a-x)y$$

4. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné funkcie úlohy:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$$
$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ , \ 0 \le y \le b$$
$$u(x,0) = 0 \ , \ u(x,b) + u_y(x,b) = 0 \ , \ 0 \le x \le b$$

5. Riešte ZOÚ

$$u_t = K\Delta u \ , \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \ , \ t > 0$$
$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \ , \ 0 \le y \le b \ , \ t > 0$$
$$u_y(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \ , \ 0 \le x \le b \ , \ t > 0$$
$$u(x,y,0) = x(a - x)(b - y)^2$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.5

1. $$u(x,y,t) = \frac{64Ab^4}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{b}\pi x \sin \frac{2n+1}{b}\pi y}{(2k+1)^3(2n+1)^3} \times$$
$$\times \cos \sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2}\, \frac{c\pi t}{b}$$

2. $$\lambda_{kn} = \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{h}\right)^2 \ , \ k \ , \ n = 1, 2, 3, \dots ,$$

$u_{kn}(x,y) = \sin \frac{k\pi}{l}x \sin \frac{\mu_n}{h}y$, kde μ_n sú korene rovnice $\operatorname{tg}\mu_n = \frac{\alpha}{h}\mu_n$.

3. $u(x,y,t) =$

$$= \frac{64a^2b}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{b}\pi x \sin \frac{2n+1}{2b}\pi y}{(2k+1)^3(2n+1)^2}\, e^{-((2k+1)\pi/a)^2 + ((2n+1)\pi/2b)^2)Kt}$$

4. $\lambda_{kn} = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{b}\right)^2$, $k, n = 1, 2, 3, \ldots$ a μ_n sú korene rovnice

$\operatorname{tg} \mu_n = -\frac{b}{\mu_n}$ a $u_{kn}(x,y) = \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{\mu_n y}{b}$.

5. $$u(x,y,t) = -\frac{32a^2b^2}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a} \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{(2k+1)^3(2n+1)^3} \times$$

$$\times\ e^{-[((2k+1)\pi/a)^2 + ((2n+1)\pi/2b)^2]Kt} .$$

Riešenie nehomogénnych parciálnych diferenciálnych rovníc budeme demonštrovať na najjednoduchších ZOÚ pre parabolickú a hyperbolickú rovnicu. Uvažujme nehomogénnu rovnicu vedenia tepla a nehomogénnu rovnicu kmitania struny, t.j. hľadaná funkcia u bude závisieť iba od jednej priestorovej premennej

$$\left.\begin{matrix} u_t(x,t) \\ u_{tt}(x,t) \end{matrix}\right\} = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \tag{6.1}$$

Funkcia $f(x,t)$ vyjadruje vnútorné zdroje tepla v prípade parabolickej rovnice vedenia tepla a kolmý tlak na strunu v prípade hyperbolickej rovnice kmitania struny.

Najprv uvažujme rovnice (6.1) s homogénnymi začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{matrix} u(x,0) = 0 \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = 0 \end{matrix}\right\} , \ 0 \le x \le a \tag{6.2}$$

a s okrajovými podmienkami

$$\alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = 0 \ , \ t \ge 0 \tag{6.3}$$

$$\gamma u(a,t) + \delta u_x(a,t) = 0 \ , \ t \ge 0 \tag{6.4}$$

Riešenie na základe vety 4.1 môžeme rozvinúť do Fourierovho radu podľa ortogonálneho systému vlastných funkcií $\{X_n\}$ Sturmovej - Liouvilleovej úlohy

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \ 0 < x < a$$

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0$$

$$\gamma X(a) + \delta X'(a) = 0$$

ktorú dostaneme metódou separácie premenných z homogénnej parciálnej diferenciálnej rovnice. Teda riešenie hľadáme v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)\, X_n(x) \tag{6.5}$$

kde

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a u(x,t)\, X_n(x)\, dx \tag{6.6}$$

Funkciu $f(x,t)$ rozvinieme do Fourierovho radu podľa ortogonálneho systému vlastných funkcií $\{X_n\}$ a označíme:

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a f(x,t)\, X_n(x)\, dx \tag{6.7}$$

Vzťahy (6.5) a (6.7) dosadíme do rovnice (6.1) a dostaneme rovnosť dvoch Fourierových radov. Porovnaním koeficientov pri členoch funkciách $X_n(x)$

dostávame systém rovníc:

$$\left.\begin{matrix}\Psi'_n(t)\\ \Psi''_n(t)\end{matrix}\right\} = -\lambda_n\,\Psi_n(t) + f_n(t) \tag{6.8}$$

s doplňujúcimi podmienkami pre parabolickú rovnicu:

$$\Psi_n(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^a u(x,0)\,X_n(x)\,dx = 0$$

a pre hyperbolickú rovnicu

$$\Psi_n(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^a u(x,0)\,X_n(x)\,dx = 0$$

$$\Psi'_n(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^a u_t(x,0)\,X_n(x)\,dx = 0$$

Tak dostávame nehomogénne lineárne obyčajné diferenciálne rovnice, ktoré už vieme riešiť . V prípade parabolickej rovnice mame

$$\Psi_n(t) = \int_0^t f_n(s)\,e^{-\lambda_n(t-s)}ds \tag{6.9}$$

a v prípade hyperbolickej rovnice riešenie je

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t f_n(s)\,\sin\sqrt{\lambda_n}(t-s)\,ds \tag{6.10}$$

Teda riešením ZOÚ pre parabolickú resp. hyperbolickú nehomogénnu rovnicu je rad (6.5) s funkciami $\Psi_n(t)$ definovanými vzťahom (6.9) pre parabolickú a vzťahom (6.10) pre hyperbolickú rovnicu.

ZOÚ pre parabolickú alebo hyperbolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\left.\begin{matrix}u_t(x,t)\\ u_{tt}(x,t)\end{matrix}\right\} = c^2u_{xx}(x,t) + f(x,t)\ ,\ 0 < x < a \tag{6.11}$$

s nehomogénnymi začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{matrix}u(x,0) = \Phi(x)\\ u(x,0) = \Phi(x)\ ,\ u_t(x,0) = \Phi_1(x)\end{matrix}\right\}\ ,\ 0 \le x \le a \tag{6.12}$$

a s okrajovými podmienkami (6.3) a (6.4) riešime tak, že riešenie hľadáme v tvare súčtu dvoch funkcií

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{6.13}$$

pričom funkcia $v(x,t)$ je riešením úlohy

$$\left.\begin{matrix}v_t(x,t)\\ v_{tt}(x,t)\end{matrix}\right\} = c^2v_{xx}(x,t)\ ,\ 0 < x < a \tag{6.14}$$

so začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{matrix}v(x,0) = \Phi(x)\\ v(x,0) = \Phi(x)\ ,\ v_t(x,0) = \Phi_1(x)\end{matrix}\right\}\ ,\ 0 \le x \le a \tag{6.15}$$

a s okrajovými podmienkami (6.3) , (6.4) a funkcia $w(x,t)$ je riešením úlohy:

$$\left.\begin{matrix} w_t(x,t) \\ w_{tt}(x,t) \end{matrix}\right\} = c^2 w_{xx}(x,t) + f(x,t) \text{ , } 0 < x < a \tag{6.16}$$

s homogénnymi začiatočnými podmienkami

$$\left.\begin{matrix} w(x,0) = 0 \\ w(x,0) = 0 \text{ , } w_t(x,0) = 0 \end{matrix}\right\} \text{ , } 0 \le x \le a \tag{6.17}$$

a s okrajovými podmienkami (6.3) a (6.4) . Obe úlohy už vieme riešiť.

Pomocou vlastných hodnôt a vlastných funkcií, ktoré sme dostali ako riešenie Helmholtzovej rovnice v časti 4.5, budeme riešiť nasledujúcu nehomogénnu eliptickú OÚ:

$$\Delta u = f(x,y) \text{ , } 0 < x < a \text{ , } 0 < y < b \tag{6.18}$$

s okrajovými podmienkami

$$u(x,0) = u(x,b) = 0 \text{ , } 0 < x < a \tag{6.19}$$

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \text{ , } 0 < y < b \tag{6.20}$$

Rovnica (6.18) sa nazýva Poissonova rovnica a jej fyzikálna interpretácia je napr. priehyb obdĺžnikovej membrány, ktorá je upevnená na všetkých okrajoch a na ktorú pôsobí kolmo vonkajšia sila $f(x,y)$. Riešením úlohy:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ , } 0 < x < a \text{ , } 0 < y < b$$

$$u(x,0) = u(x,b) = 0 \text{ , } 0 < x < a$$

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \text{ , } 0 < y < b$$

sme dostali vlastné hodnoty

$$\lambda_{kn} = \pi^2 \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \text{ , } k = 1, 2, \dots \text{ , } n = 1, 2, \dots$$

a vlastné funkcie

$$u_{kn}(x,y) = c_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \text{ , } k = 1, 2, \dots \text{ , } n = 1, 2, \dots$$

Riešenie úlohy (6.18) - (6.20) budeme hľadať v tvare

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Funkciu $f(x,y)$ rozvinieme do dvojitého Fourierovho radu podľa vlastných funkcií u_{kn} :

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

kde

$$f_{kn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dxdy$$

Po dosadení oboch vzťahov do rovnice (6.18) a porovnaní koeficientov pri u_{kn} máme:

$$-\lambda_{kn} a_{kn} = f_{kn} \ , \ k = 1, 2, \ldots \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

odkiaľ

$$a_{kn} = -\frac{f_{kn}}{\lambda_{kn}}$$

a riešenie úlohy dostávame v tvare dvojitého radu

$$u(x,y) = \frac{4ab}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} dxdy}{(k^2b^2 + n^2a^2)} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

CVIČENIA 4.6

1. Homogénna struna s dĺžkou a votknutá na koncoch $x = 0$, $x = a$ kmitá pôsobením vonkajšej harmonickej sily dĺžkovej hustoty $F(x,t) = \rho f(t) \sin \omega t$. Nájdite riešenie rovnice kmitania struny ak uvažujeme ľubovoľné začiatočné podmienky. Uvažujte možnosť rezonancie a nájdite riešenie úlohy v tomto prípade. Formulácia úlohy:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x) \sin \omega t \ , \ 0 < x < a$$
$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$$
$$u(x,0) = \Phi(x) \ , \ u_t(x,0) = \Phi_1(x) \ , \ 0 \le x \le a$$

Riešte začiatočno-okrajové úlohy:

2. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + b \sinh x \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$

$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

3. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + bx(x - a) \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$

$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

4. $u_{tt} = u_{xx} + x(x - a)t^2 \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$

$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

5. $u_t = c^2 u_{xx} + A\omega\left(\frac{x}{a} - 1\right)\cos \omega t \ , \ 0 < x < a \ , \ t > 0$

$u(0,t) = u(a,t) = 0 \ , \ t > 0$

$u(x,0) = 0 \ , \ 0 \le x \le a$

6. $u_t = u_{xx} + x(a - x)t$, $0 < x < a$, $t > 0$

$u(0,t) = u(a,t) = 0$, $t > 0$

$u(x,0) = 0$, $0 \le x \le a$

Riešte okrajové úlohy:

7. $\Delta u = y(1 - y)\sin^3 x$, $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$

$u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0$

8. $\Delta u = \sin x - \sin^3 x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 2$

$u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0$

$u(0,y) = u(\frac{\pi}{2},y) = 0$

9. $\Delta u = - 2y$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

$u(x,0) = u(x,1) = 0$

$u(0,y) = u(1,y) = 0$

10. $\Delta u = x^2 - y^2$, $0 < x < a$, $0 < y < a$

$u_y(x,0) = u_y(x,a) = 0$

$u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0$

VÝSLEDKY CVIČENÍ 4.6

1. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{a} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)}(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{a} \text{ , kde}$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a \Phi(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \text{ , } b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^a \Phi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \text{ , } \omega_n = \frac{cn\pi}{a}$$

Rezonancia nastáva v tom prípade, ak frekvencia ω vonkajšej budiacej sily je rovná jednej z vlastných frekvencií

$$\omega = \omega_{n_1} = \frac{cn_1\pi}{a}$$

V tom prípade dostaneme riešenie

$$u(x,t) = \frac{f_{n_1}}{2\omega_{n_1}^2}(\sin \omega_{n_1} t - t\omega_{n_1} t) \sin \frac{n_1\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)}(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{a} \text{ , kde}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}{}'$ znamená, že zo sumy vylúčime člen $n = n_1$.

2. $u(x,t) = \dfrac{2ba^2 \sinh a}{\pi c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n^2\pi^2 + a^2)}\left[1 - \cos \dfrac{n\pi ct}{a}\right] \sin \dfrac{n\pi x}{a}$

3. $u(x,t) = 8\left(\dfrac{a}{\pi}\right)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{c^2(2n + 1)^5} \left[1 - \cos \dfrac{(2n + 1)c\pi t}{a}\right] \sin \dfrac{(2n + 1)\pi x}{a}$

4. $u(x,t) = - \dfrac{8a^4t^2}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{(2n + 1)\pi x}{a}}{(2n + 1)^5} + \dfrac{16a^6}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{(2n + 1)\pi x}{a}}{(2n + 1)^7} +$

$+ \dfrac{16a^6}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{(2n + 1)\pi x}{a} \sin \dfrac{(2n + 1)\pi t}{a}}{(2n + 1)^7}$

5. $u(x,t) = \dfrac{2A\omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n\pi c)^2 e^{-((n\pi c/a)^2 t} - (n\pi c)^2 \cos \omega t - \omega a^2 \sin \omega t}{n[(n\pi c)^2 + a^2\omega^2]} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$

6. $u(x,t) = \dfrac{4a^3}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1e^{-((2n+1)\pi/a)^2 t} + t(2n + 1)\pi - a}{(2n + 1)^5} \sin \dfrac{2n + 1}{a} x$

7. $u(x,y) = \dfrac{3}{\pi^4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n + 1)^3(n^2\pi^2 + 1)} \sin n\pi y \right) \sin x +$

$+ \dfrac{1}{\pi^4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n + 1)^3(n^2\pi^2 + 9)} \sin n\pi y \right) \sin 3x$

8. $u(x,y) = - \dfrac{1}{4} \sin x - \dfrac{1}{36} \sin 3x$

9. $u(x,y) = \dfrac{4}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin (2k + 1)\pi x \sin n\pi y}{(2k + 1)^2 n \, [(2k + 1)^2 + n^2]}$

10. $u(x,y) = 4\left(\dfrac{a}{\pi} \right)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^4} \cos \dfrac{k\pi x}{a} - 4\left(\dfrac{a}{\pi} \right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^4} \cos \dfrac{n\pi y}{a}$

LITERATÚRA

[1] Arsenin,V.J.: Matematická fyzika. Bratislava, Alfa 1977.

[2] Barták,J.- Hermann,L.- Lovicar,J.- Vejvoda,O.: Parciální diferenciální rovnice II: Evoluční rovnice. MVŠT XXI. Praha, SNTL 1988.

[3] Bock,I.: Matematická fyzika. Bratislava, ES STU 1987.

[4] Bock,I.- Horniaček,J.: Matematická analýza III. Bratislava, Alfa 1990.

[5] Brabec,J.- Martan,F.- Rozenský,Z.: Matematická analýza I. Praha, SNTL 1985.

[6] Brabec,J.- Hrůza,B.: Matematická analýza II. Praha, SNTL 1986.

[7] Galanová,J.- Gatial,J.- Kaprálik,P.: Lineárna algebra. Bratislava, ES STU 1991.

[8] Greguš,M.- Švec,M.-Šeda,W.: Obyčajné diferenciálne rovnice. Bratislava, Alfa-SNTL 1985.

[9] Havel,V.- Holenda,J.: Lineární algebra. Praha, SNTL-Alfa 1984.

[10] Kluvánek,I.- Mišík,L.- Švec,M.: Matematika I, II. Bratislava, Alfa 1963.

[11] Kurzweil,J.: Obyčejné diferenciální rovnice. Praha, SNTL 1978.

[12] Míka,S.- Kufner,A.: Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. MVŠT XIX. Praha, SNTL 1981.

[13] Míka,S.- Kufner,A.: Parciální diferenciální rovnice I:Stacionární rovnice. MVŠT XX. Praha, SNTL 1983. scientists and engineers. New York, North Holland 1987.

[14] Moravský,L.- Moravčík,J.- Šulka,R.:Matematická analýza II. Bratislava, Alfa 1992.

[15] Nagy,J.: Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. MVŠT IX. Praha, SNTL 1978.

[16] Nagy,J.: Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. MVŠT XV. Praha, SNTL 1980.

[17] Putzer,E.J.: Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients. Amer. Math. Monthly, 73, Jan.1966, s.2-7.

[18] Šulka,R.- Moravský,L.- Satko,L.: Matematická analýza I. Bratislava, Alfa-SNTL 1986.

[19] Vladimirov, V.S.: Uravnenija matematičeskoj fiziki. Moskva, Nauka 1981.