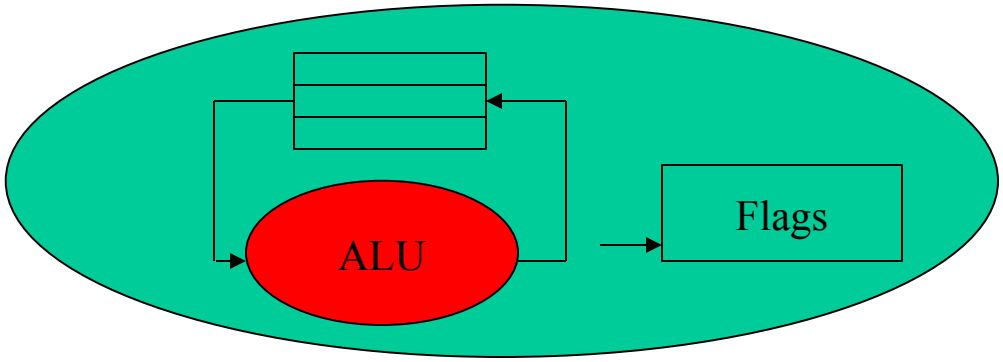
Základné aritmeticko-logické operácie

Aritmeticko-logické operácie sa väčšinou vykonávajú v artitmeticko-logickej jednotke (**ALJ**) (Arithmetics and Logic Unit (**ALU**)), ktorá je súčasťou centrálnej procesorovej jednotky (Central Process Unit **CPU**)

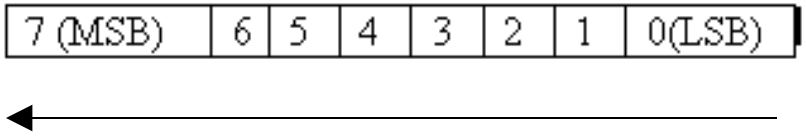


Logické operácie

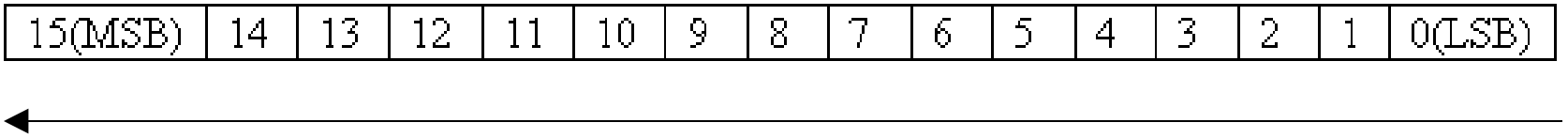
Logické operácie sa uskutočňujú nad pamäťovými miestami obyčajne s registrami CPU, pričom sa operácia vykonáva so všetkými dvojicami bitov pamäťových miest.
Pamäťové miesta (slová) môžu byť jedno a viacbajtové.

Bity v slovách označujeme indexom, ktorého počiatočná hodnota je 0, a index narastá sprava doľava

Označovanie bitov v 8-bitovom slove (v jednobajtovom slove)



Označovanie bitov v 16-bitovom slove (v dvojbajtovom slove)



LSB – Least Significant Bit (bit s najmenšou váhou)
MSB – Most Significant Bit (bit s najväčšou váhou)

Bit (1b), Nibble (4b), Byte (8b = 1B), Word (2B, …..)

Operácie delíme na:

- **unárne** – vykonávajú sa s jedným pamäťovým miestom
- **binárne**– vykonávajú sa s dvomi pamäťovými miestami

Medzi elementárne operácie, ktoré vykonávajú takmer všetky CPU, patria :

- negácia
- logický súčet
- logický súčin
- neekvivalencia

Negácia (NOT)

Patrí medzi unárne operácie

Pravidlá pre jednobitové operandy sú

$$B = NOT(A) \quad [B = \overline{A}]$$

A	B
0	*1*
1	*0*

Pre viacbitové (budeme uvádzať príklady pre 8-bitové operandy (jeden bajt)

$$B = NOT(A) \quad [b = \sim a]$$

A	0	1	0	1	1	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0	1	1

Logický súčet (OR)

Patrí medzi binárne operácie
Pravidlá pre jednobitové operandy sú

$C = A \; OR \; B \quad [C = A + B]$

A	B	C
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Pre jednobajtové operandy

$C = A\ OR\ B$	$[c = a \mid b]$							
A	0	1	0	1	1	1	1	0
B	1	0	0	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1	1	1	1

Použitie – vnútenie logickej jednotky do ľubovolnej pozície v byte (bytoch) tzv. maskou

Napr. Vykonaním logického súčtu ľubovolného bytu s maskou, ktorá je reprezentovaná bytom s obsahom

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad [C4_H]$$

bude v uvedenom byte v bitoch s indexom 7,6 a 2 vždy logická jednotka bez ohľadu na predchádzajúci obsah bytu.

$$1 \quad 1 \quad X \quad X \qquad X \quad 1 \quad X \quad X$$

kde X je obsah bitu pred vykonaním operácie.

Logický súčin (AND)

Patrí medzi binárne operácie
Pravidlá pre jednobitové operandy sú

$C = A \text{ AND } B \quad [C = A.B]$

A	B	C
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Pre jednobajtové operandy

$C = A\ AND\ B \quad [c = a \,\&\, b]$

A	0	1	0	1	1	1	1	0
B	1	0	0	1	0	1	1	1
C	0	0	0	1	0	1	1	0

Použitie

– vnútenie logickej nuly do ľubovolnej pozície v byte (bytoch) tzv. maskou

Napr.: Vykonaním logického súčinu ľubovolného bytu s maskou, ktorá je reprezentovaná bytom s obsahom

0 0 1 1 1 0 1 1 $[3B_H]$

bude v uvedenom byte v bitoch s indexom 7,6 a 2 vždy logická nula bez ohľadu na predchádzajúci obsah bitu.

$$0 \quad 0 \quad X \quad X \qquad X \quad 0 \quad X \quad X$$

- pomocou masky môžeme testovať logickú hodnotu vybraného bitu (bitov) bajtu (bajtov).
Použitím napr. masky

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad [02_H]$$

po vykonaní logického súčinu s vybraným bajtom, bude výsledok operácie nulový, ak v bite s indexom 1 bola logická nula, a naopak nenulový, ako v danom bite bola logická jednotka.
Nulový výsledok znamená, že bajt (bajty), do ktorých sa zapíše výsledok aritmeticko-logickej operácie obsahuje vo všetkých bitoch binárnu hodnotu nula.

Neekvivalencia (XOR)

Patrí medzi binárne operácie
Nazýva sa tiež exluzívny súčet, súčet modulo 2, EOR
Pravidlá pre jednobitové operandy sú

$C = A \; XOR \; B \quad [C = A \oplus B]$

A	B	C
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Pre jednobajtové operandy

$C = A\ XOR\ B \quad [c = a \hat{}\ b]$

A	0	1	0	1	1	1	1	0
B	1	0	0	1	0	1	1	1
C	1	1	0	0	1	0	0	1

Použitie

– invertovanie logickej hodnoty v ľubovolnej pozícii v bajte (bajtoch) maskou

Napr. Vykonaním neekvivalencie ľubovolného bytu s maskou, ktorá je reprezentovaná bytom s obsahom

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad [3B_H]$$

bude výsledok operácie

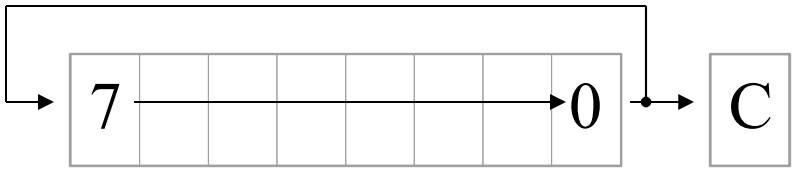
$$X \quad X \quad \overline{X} \quad \overline{X} \quad \overline{X} \quad X \quad \overline{X} \quad \overline{X}$$

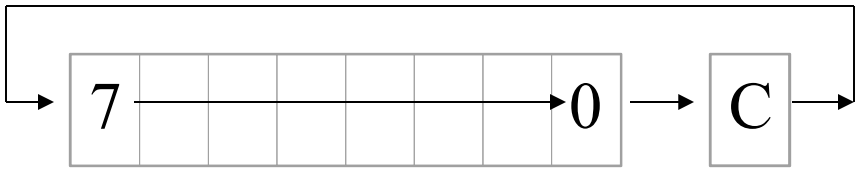
Posuny a rotácie

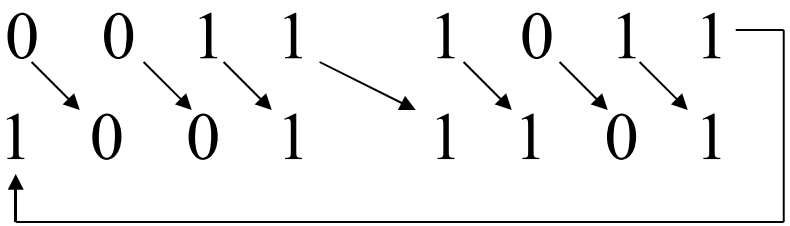
Medzi najzákladnejšie operácie ALU patria posuny a rotácie obsahov pamäťových miest. Patria medzi unárne operátory. Operácie sa vykonávajú posúvaním obsahov bitov doľava, alebo doprava, prípadne n-tica pamäťových bitov sa doplní formálne o pomocný bit na (n+1) –ticu (pomocným bitom bývajú príznakové (stavové) bity CPU, napr. Carry bit)

Rotácie

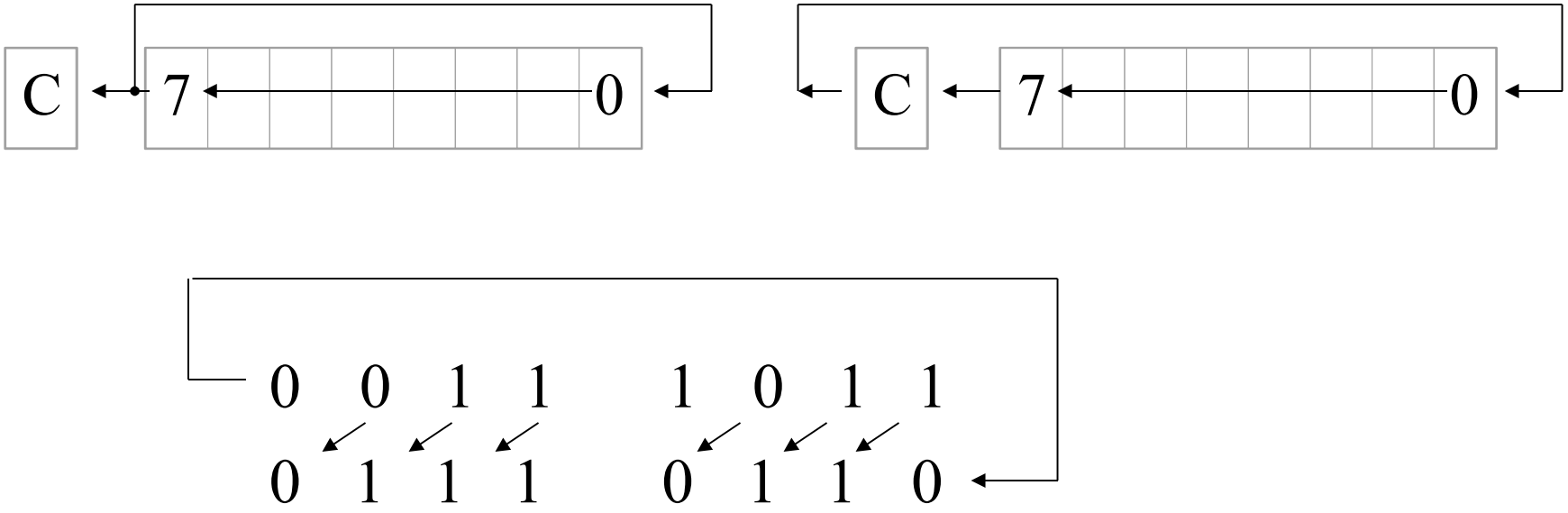
Rotácia obsahu pamäťového miesta **doprava**







Rotácia obsahu pamäťového miesta **dol'ava**

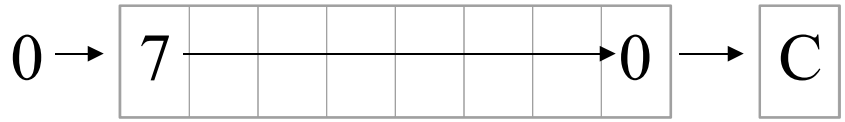


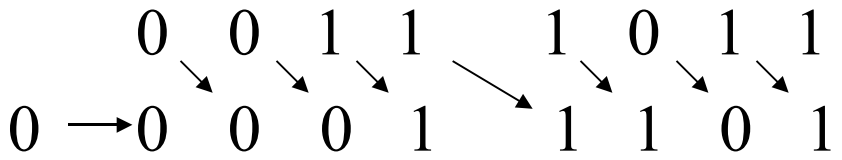
Posuny obsahu pamäťového miesta môžu byť

- **logické** alebo **aritmetické**

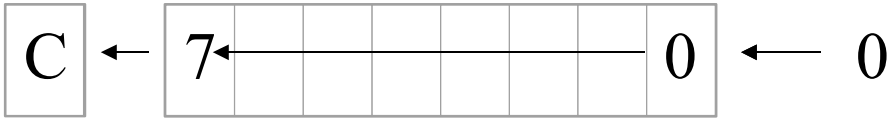
Logické posuny:

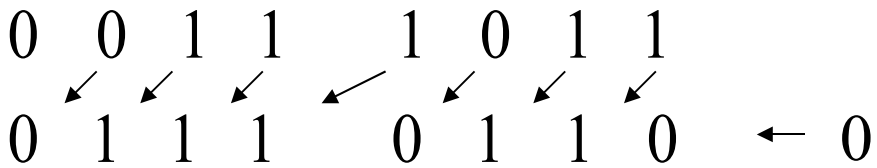
Logický posun obsahu pamäťového miesta **doprava**





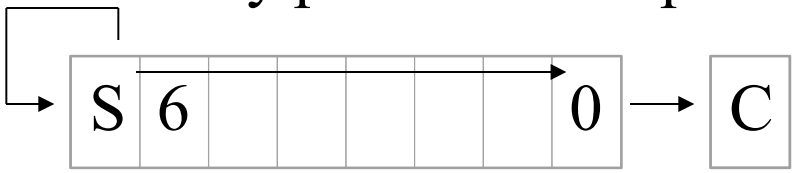
Logický posun obsahu pamäťového miesta **doľava**



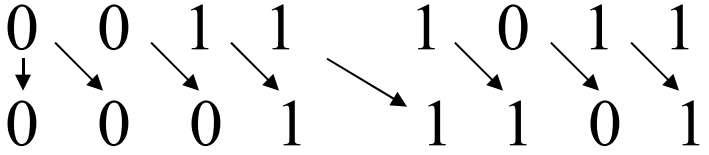


Aritmetické posuny

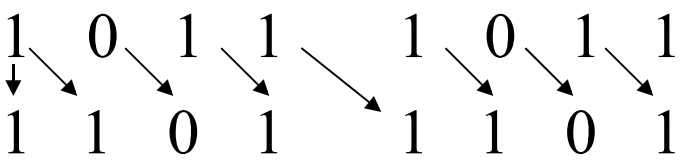
Aritmetický posun obsahu pamäťového miesta **doprava**



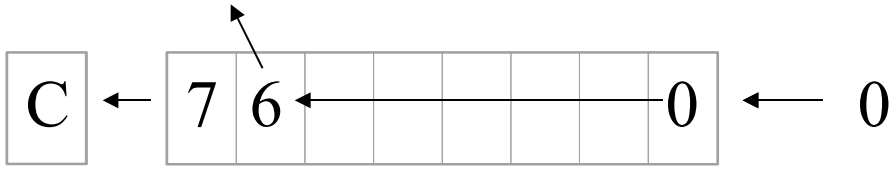
S = 0



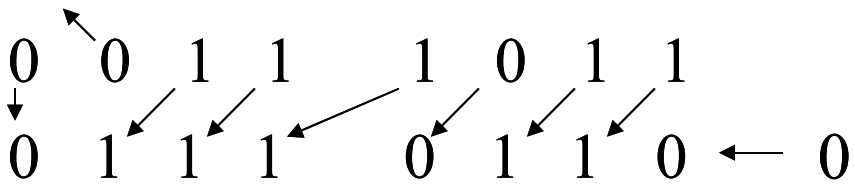
S = 1



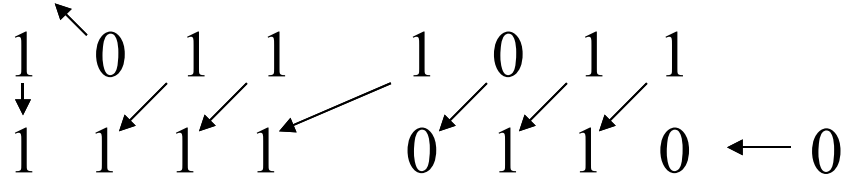
Aritmetický posun obsahu pamäťového miesta **doľava**



S = 0



S = 1



Použitie :

-cyklické testovanie obsahu bitov

- vytváranie slov pri kódovaní

- aritmetické posuny

- aritmetický posun doprava je celočíselným delením číslom 2 pri n posunoch ide o celočíselné delenie číslom 2^n

$(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)_2 = 32+16+8+2+1 = (59)_{10}$

$(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1)_2 = 16+8+4+1 = (29)_{10}$

$59 : 2 = 29 \quad R = 1 \qquad a = b >> n;$

- celočíselný posun **dol'ava** je násobením číslom 2 pri n posunoch ide o násobenie číslom 2^n

$(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)_2 = 32+16+8+2+1 = (59)_{10}$

$(0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)_2 = 64+32+16+4+2 = (118)_{10}$

$59 * 2 = 118 \qquad a = b << n;$

Jazyk C: Operátory na manipuláciu s bitmi

&	logický súčin po bitoch
|	logický súčet po bitoch
^	neekvivalencia po bitoch
<<	posuv vľavo
>>	posuv vpravo
~	unárny operátor, jednotkový doplnok

Treba odlišovať &, | od logických spojok && a | |.

Celočíselná arimetika

Medzi základné celočíselné aritmetické operácie, ktoré realizuje ALU, patria

- súčet
- rozdiel
- násobenie
- delenie

} Všetky tieto operácie sú binárne.

Binárne číslo:

- Dva znaky „0“ a „1“
- Znamienko mínus „-“
- Desatinná bodka „.“

Vieme zapísať: $(-1011.01010)_2=(-11.3125)_{10}$

} Počítač pozná Len: „0“ a „1“

Celé čísla bez znamienka

Ak interpretujeme binárny obsah slova, ako zobrazenie dekadického čísla v pozičnej číselnej sústave so základom 2, ide o zobrazenie celých nezáporných čísel, t.j. celých čísel bez znamienka (sú to celé čísla typu **unsigned**).

Súčet, rozdiel čísel bez znamienka

Pre súčet, rozdiel binárnych čísel platia pravidlá binárnej aritmetiky pre jednobitové slová, kde okrem výsledného bitu, treba uvažovať signalizáciu prenosu, výpožičky do, z vyššieho rádu.

$S = A \overset{+}{\underset{-}{/}} B$

A	B	S	+ $carry\ (C)$	− $borrow$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	1	0	1	0

Modulo 2, XOR

V prípade súčtu dvoch 8-bitových slov bude

	0	0	1	1	1	0	1	1	$(59)_{10}$
+	0	1	1	1	0	1	1	0	$(118)_{10}$
carry ⟨0⟩	1	1	1	1	1	1	0		
=	1	0	1	1	0	0	0	1	$(177)_{10}$

59 + 118 = 177

v ďalšom príklade

	1	0	1	1	1	0	1	1	$(187)_{10}$
+	0	1	1	1	0	1	1	0	$(118)_{10}$
carry ⟨1⟩	1	1	1	1	1	1	0		
=	0	0	1	1	0	0	0	1	$(49)_{10}$

187 + 118 = 305

V tomto prípade došlo k požiadavke na prenos do vyššieho rádu, po skončení sčítania. ALU obsahujú stavové slovo, ktorého jeden bit (Carry Bit) slúži na zapisovanie tejto informácie. Po vykonaní súčtu získame informáciu: pamäťové miesto nestačí svojou veľkosťou na zápis výsledku sčítania.

- pri viacslovnom sčítaní musíme uvažovať hodnotu tohoto bitu pri sčítaní slov vyšších rádov
- v prípade súčtu celých čísel bez znamienka platí, že zároveň signalizuje tzv. pretečenie **(overflow)** (vo všeobecnosti neplatí).

Pretečenie znamená, že výsledok operácie nie je zobraziteľný (to, čo je vo výsledku, nie je správny výsledok operácie).

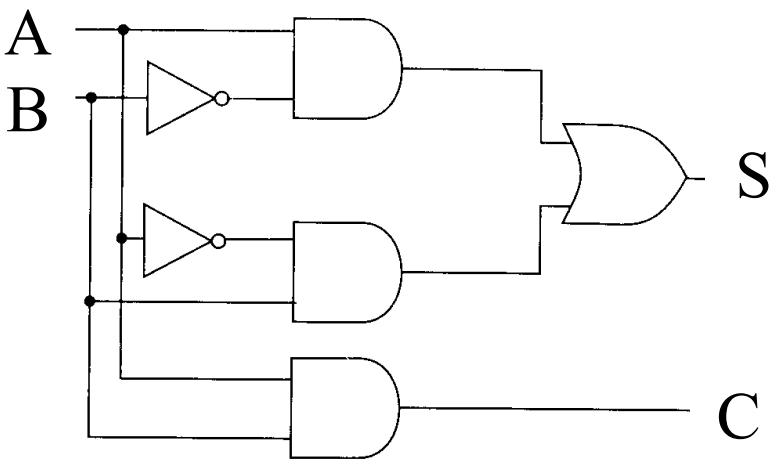
Na realizáciu sčítania sa v ALU používajú sčítačky realizované pomocou logických obvodov. Pri sčítaní na najnižšom ráde platí (sčítanie nultého rádu) sa používa polovičná sčítačka.
Popis polovičnej sčítačky pomocou aritmetických operácií

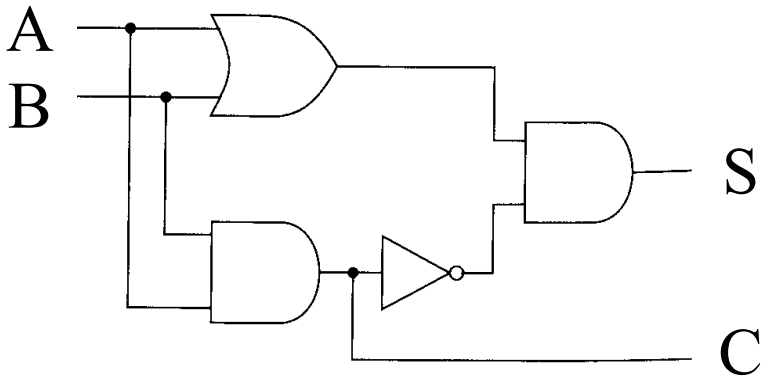
$$s_0 = (a_0 + b_0) \bmod 2 \quad c_1 = (a_0 + b_0)/2$$

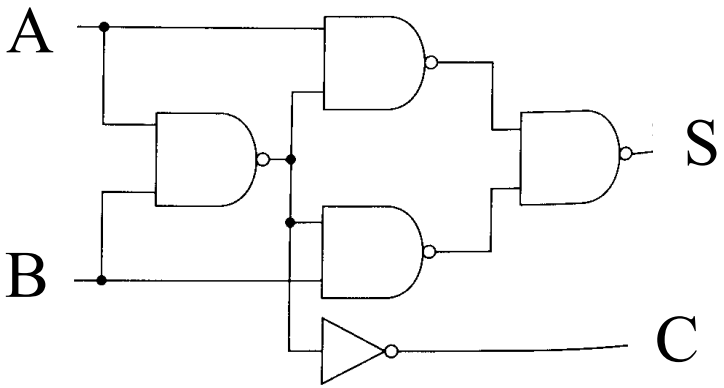
a logických operácií

$$s_0 = a_0\bar{b}_0 + \bar{a}_0 b_0 \quad c_1 = a_0.b_0$$

Polovičná sčítačka sa dá realizovať pomocou kombinačných obvodov

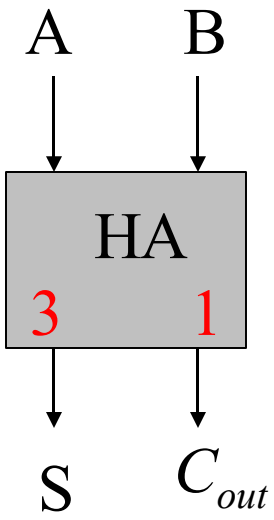


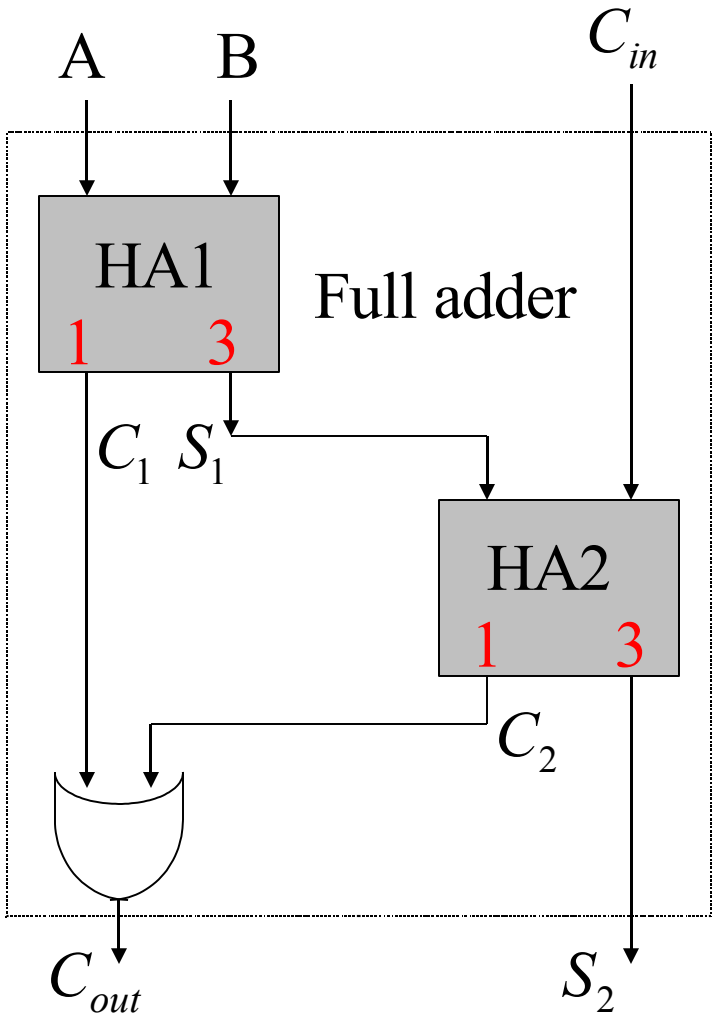




Tri možné spôsoby realizácie polovičnej sčítačky.
Oneskorenie: „S“ = 3 a „C“ = 1,2

Vytvorenie úplnej sčítačky pomocou polovičnej sčítačky :





Realizácia: 9 obvodov.

Oneskorenie: „S“ = 6 a „C“ = 5

Pri sčítaní na ďalších rádoch treba uvažovať prenosy z predchádzajúcich rádov

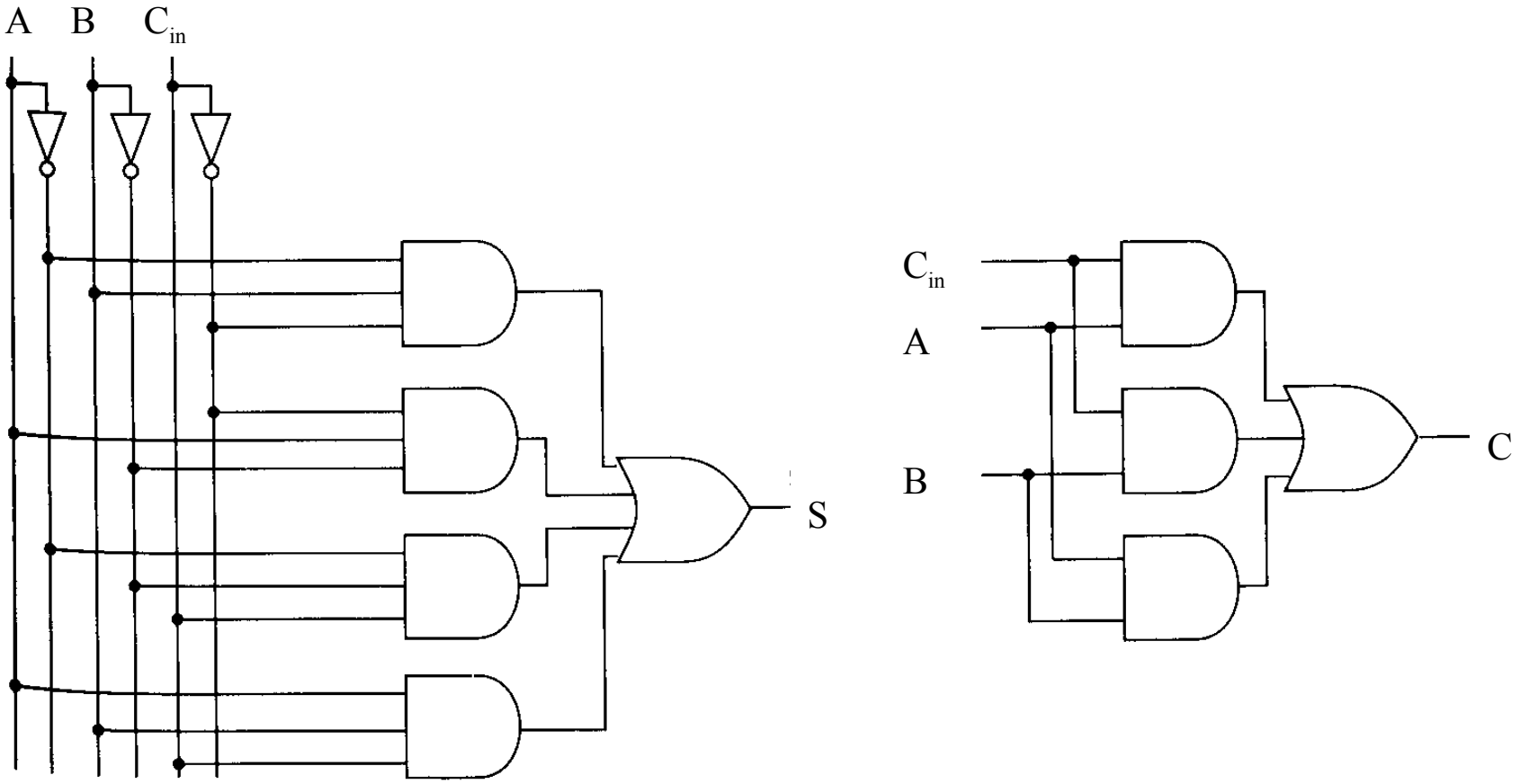
$S = A + B$

A	B	C_I	S	$carry\ (C)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$s_i = (a_i + b_i + c_i) \bmod 2 \qquad c_{i+1} = (a_i + b_i + c_i)/2$$

$$s_i = a_i\overline{b_i}\,\overline{c_i} + \overline{a_i}b_i\overline{c_i} + \overline{a_i}\,\overline{b_i}c_i + a_ib_ic_i \qquad c_{i+1} = a_i.b_i + (a_i + b_i)c_i$$

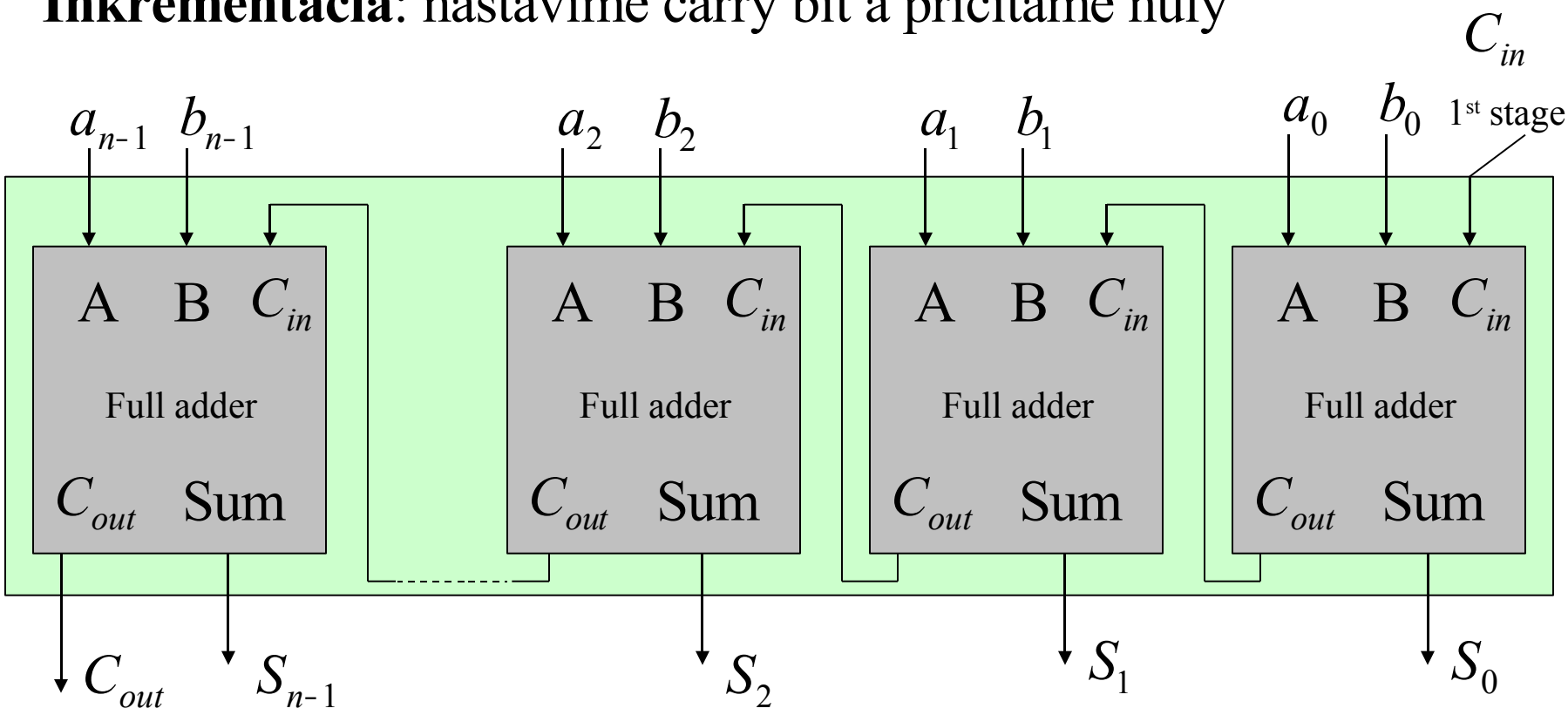
Možná praktická realizácia úplnej sčítačky :



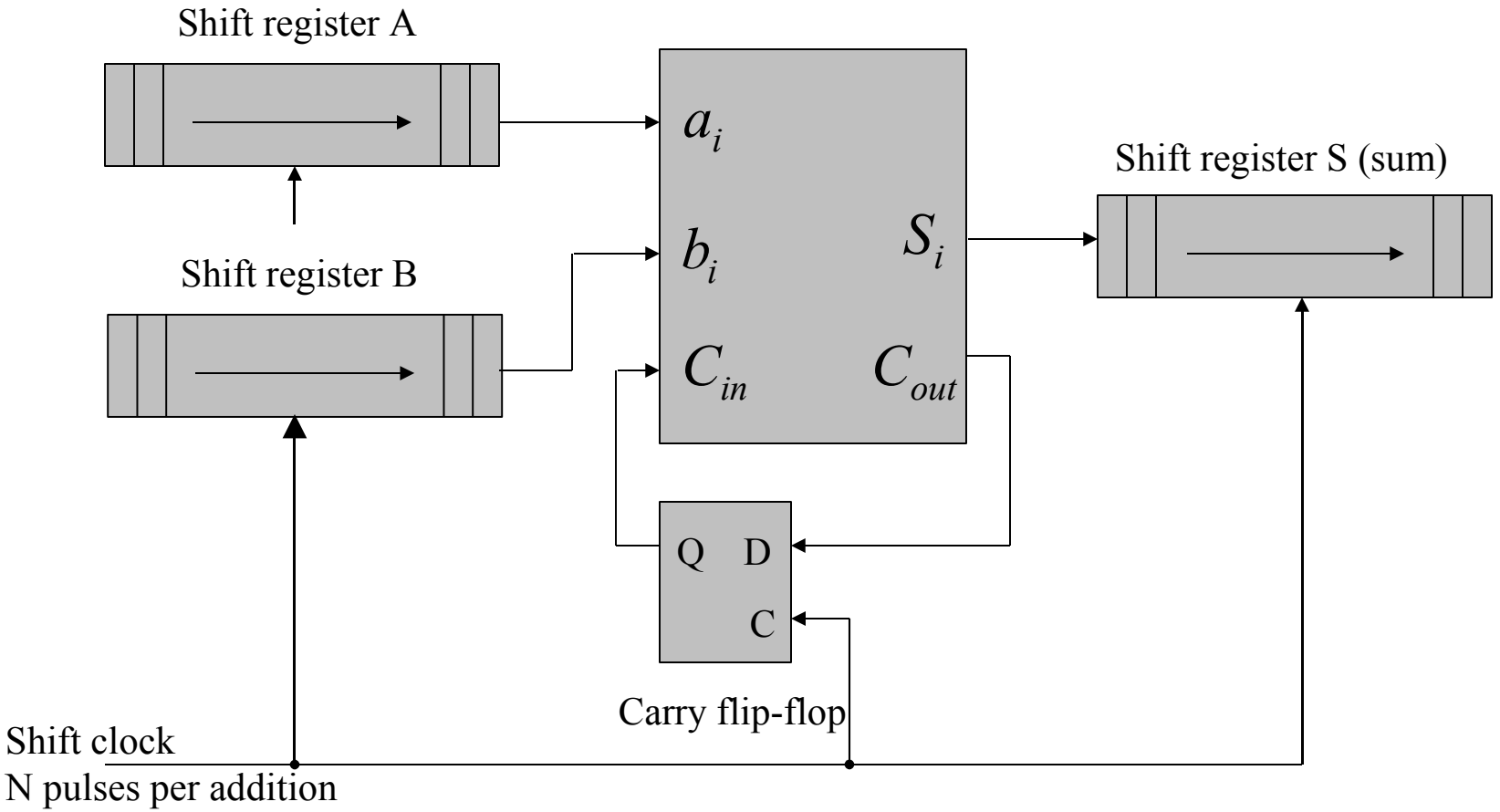
Realizácia: 12 obvodov

Oneskorenie: „S“ = 3 a „C“ = 2

Na sčítanie dvoch n-bitových čísel sa dajú použiť **paralelná** alebo **sériová** sčítačka, pričom sa vo všetkých stupňoch používa úplná sčítačka (realizácia prenosu z predchádzajúceho sčítania)
Inkrementácia: nastavíme carry bit a pričítame nuly



Paralelná sčítačka: výsledok sa šíri sprava doľava-oneskorenie



Sériová sčítačka: oneskorenie dané počtom taktov

Rozdiel čísel bez znamienka

Pre odčítanie binárnych čísel platia pravidlá binárnej aritmetiky pre jednobitové slová

$S = A - B$

A	B	S	$borrow\,(B)$
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	0	0

kde okrem výsledného bitu, treba uvažovať signalizáciu výpožičky z vyššieho rádu (borrow).

V prípade odčítania dvoch 8-bitových slov bude

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \quad (187)_{10} \\
- & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \quad (118)_{10} \\
\hline
borrow\langle 0 \rangle & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \quad (69)_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \quad (59)_{10} \\
- & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \quad (118)_{10} \\
\hline
borrow\langle 1 \rangle & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \quad (197)_{10}
\end{array}
$$

$59 - 181 = -122 \qquad [(256 + 59) - 118 = 197]$

V druhom prípade je po vykonaní operácie nastavený príznak podtečenia
-v prípade viacbajtového odčítania je potrebné tento príznak uvažovať
- inak je výsledok nesprávny – výsledok nie je zobraziteľný

Hardvérovo sa dá odčítačka realizovať, ale na inom princípe, nie realizáciou pravidiel pre odčítanie.

Zobrazenie záporných celých čísel

Možné reprezentácie celých záporných čísel
- priamy kód
- inverzný
- doplnkový

Treba riešiť dve úlohy:
• Zobraziť číslo,
• Realizovať operáciu s týmto číslom

Priamy kód:

MSB bit, bit s najväčšou váhou: – znamienkový bit,
n-1 bitov: absolútna hodnota čísla
MSB = 0 kladné číslo $((-1)^0 = +1)$
MSB = 1 záporné číslo $((-1)^1 = -1)$
Napr.

0 0 0 0 1 0 1 1 $(11)_{10}$

1 0 0 0 1 0 1 1 $(-11)_{10}$

- rozsah zobraziteľných čísel je symetrický $<-(2^{n-1}-1), 2^{n-1}-1>$
- pri aritmetických operáciách treba vyhodnocovať znamienka
- nejednoznačná nula

0 0 0 0 0 0 0 0 $(0)_{10}$

1 0 0 0 0 0 0 0 $(-0)_{10}$

Zložité aritmetické operácie (potrebujeme sčítačku aj odčítačku)
– nepoužíva sa

Inverzný kód (1´s complement)

MSB bit, bit s najväčšou váhou: – znamienkový bit,
MSB = 0 - kladné číslo
MSB = 1 - záporné číslo
Číslo s opačným znamienkom sa vytvára inverziou bit po bite

0 0 0 0 1 0 1 1 = $(11)_{10}$

1 1 1 1 0 1 0 0 = $(-11)_{10}$

- rozsah zobraziteľných čísel je symetrický $<-(2^{n-1}-1), 2^{n-1}-1>$
- aritmetické operácie – zložité
- nejednoznačná nula

0 0 0 0 0 0 0 0 $(0)_{10}$

1 1 1 1 1 1 1 1 $(-0)_{10}$

- kód pre n-bitové záporné číslo je vytvorený podľa vzťahu

$$Y = -X \quad Y = 2^n - X - 1$$

9 = 0000 1001 – 9 = 1111 0110

5 = 0000 0101 – 5 = 1111 1010

– 9	1111	0110		9		0000	1001
+ 5	0000	0101		– 5		1111	1010
– 4	1111	1011		4	1	0000	0011
							1
						0000	0100

pri sčítaní treba korigovať výsledok pripočítaním obsahu carry bitu k LSB

Doplnkový kód (2´s complement)

Bit s najväčšou váhou MSB – znamienkový bit, n-1 bitov absolútna hodnota čísla
MSB = 0 - kladné číslo
MSB = 1 - záporné číslo
Číslo s opačným znamienkom sa vytvára v dvoch krokoch:
1) inverzia bit po bite
2) pripočítanie jednotky (inkrementácia)

0	0	0	0		1	0	1	1	$(11)_{10}$
1	1	1	1		0	1	0	0	(*negacia*)
+								1	
1	1	1	1		0	1	0	1	$(-11)_{10}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 1 & (-11)_{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 0 & (\textit{negacia}) \\
+ & & & & & & & & 1 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 1 & (11)_{10}
\end{array}
$$

z uvedeného vyplýva, že platí

$$X = -(-X)$$

- je len jedna nula

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & (0)_{10} \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & + & & & & & & & & 1 & \\
\hline
\langle 1 \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & (-0)_{10}
\end{array}
$$

- výsledok sčítania dvoch čísel s ľubovolnou kombináciou znamienok v doplnkovom kóde dáva správny výsledok bez korekcie

$9 = 0000\ \ 1001$	$-9 = 1111\ \ 0111$
$5 = 0000\ \ 0101$	$-5 = 1111\ \ 1011$
$4 = 0000\ \ 0100$	$-4 = (1111\ \ 1011 + 1) = 1111\ \ 1100$

$-9 \quad 1111 \quad 0111$	$9 \quad 0000 \quad 1001$
$+5 \quad 0000 \quad 0101$	$-5 \quad 1111 \quad 1011$
$-4 \quad 1111 \quad 1100$	$4 \ \langle 1 \rangle \ 0000 \quad 0100$

- v prípade súčtu čísel v doplnkovom kóde nastavenie carry bitu neznamená pretečenie.

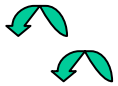
V prípade nerovnakých znamienkových bitov (MSB) pretečeniu nemôže dôjsť.

Len v prípade, že MSB obidvoch operandov je rovnaké, pretečenie nastane vtedy, ak MSB výsledku sa nezhoduje s MSB operandov!

$$Overflow = MSB_A.MSB_B\overline{MSB_S} + \overline{MSB_A}.\overline{MSB_B}MSB_S$$

Problém je, že hodnota MSB jedného z operandov v reálnom prípade je zmenená. Preto na detekciu overflow sa používajú prenosy do vyšších rádov (carry bity) posledných dvoch stupňov paralelnej sčítačky

$$Overflow = c_n.\overline{c_{n-1}} + \overline{c_n}.c_{n-1}$$

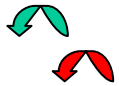


0 0 0 0 0 1 1 0 (+6)

\+ 0 0 0 0 1 0 0 0 (+8)

0 0 0 0 1 1 1 0 (+14)

V=0, C=0 => OK

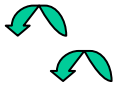


0 1 1 1 1 1 1 1 (+127)

\+ 0 0 0 0 0 0 0 1 (+1)

1 0 0 0 0 0 0 0 (-128)

V=1, C=0 => ERROR

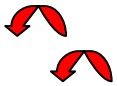


0 0 0 0 0 0 1 0 (+2)

\+ 1 1 1 1 1 1 0 0 (-4)

1 1 1 1 1 1 1 0 (-2)

V=0, C=0 => OK



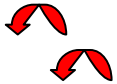
0 0 0 0 0 1 0 0 (+4)

\+ 1 1 1 1 1 1 1 0 (-2)

(C)0 0 0 0 0 0 1 0 (+2)

V=0, C=1 => OK

 = 0  = 1

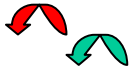


1 1 1 1 1 1 1 0 (-2)

\+ 1 1 1 1 1 1 0 0 (-4)

(C)1 1 1 1 1 0 1 0 (-6)

V=0, C=~~1~~ => OK



1 0 0 0 0 0 0 1 (-127)

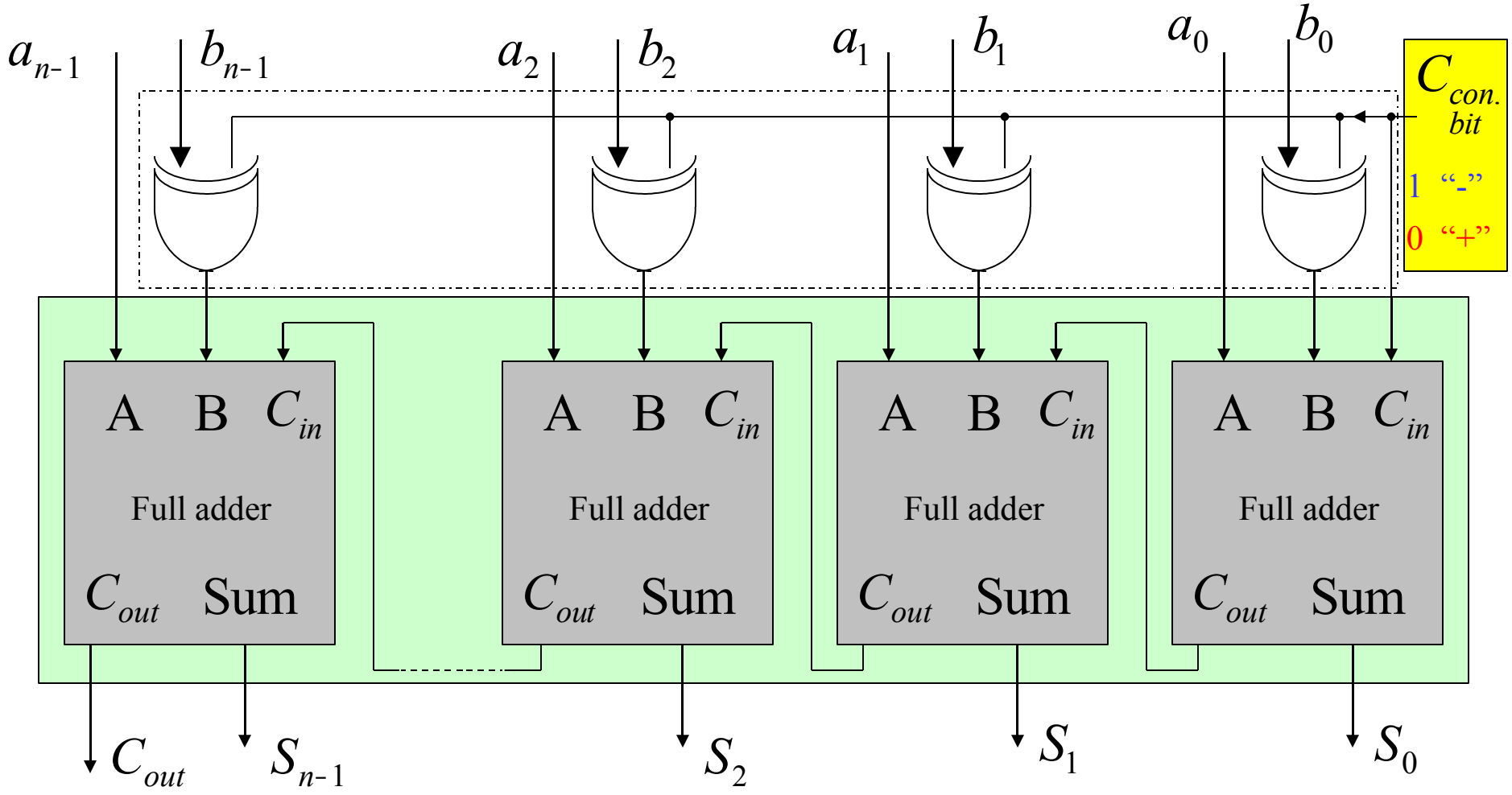
\+ 1 1 0 0 0 0 1 0 (- 62)

(C)0 1 0 0 0 0 1 1 (+ 67)

V=1, C=1 => ERROR

- kód pre n-bitové záporné číslo v doplnkovom kóde je vytvorený podľa vzťahu: $Y = -X \quad Y = 2^n - X$

- rozsah zobraziteľných čísel je nesymetrický $<-2^{n-1}, 2^{n-1}-1>$



Sčítačka-odčítačka v doplnkovom kóde

BCD kód

BCD (Binary Coded Decimal) – dvojkovo-desiatkové kódovanie

- zostáva desiatková sústava
- číslice sa kódujú do binárneho kódu

Existuje veľa možností kódovať dekadické číslice. Najväčší význam majú váhové kódy. Na kódovanie stačia 4 bity (nevyužívajú sa všetky kombinácie). Nech

$$d = a_3 v_3 + a_2 v_2 + a_1 v_1 + a_0 v_0$$

Aby kód bol vhodný pre aritmetické operácie mal by splniť nasledovné podmienky

1. Jednoznačnosť – každej dekadickej číslici je priradená jednoznačne jediná štvorica binárnych číslic
2. Aditívnosť – binárny súčet kódov číslic je rovný kódu ich súčtu
3. Symetričnosť – ak pre dve dekadické číslice platí

$$d_i + d_j = 9$$

potom medzi číslicami platí

$$d_i = a_3 a_2 a_1 a_0 \quad \Rightarrow \quad d_j = \overline{a}_3 \overline{a}_2 \overline{a}_1 \overline{a}_0$$

4. Usporiadanosť – väčším dekadickým čísliciam sú priradené väčšie kódy (možnosť porovnávania číslic)
5. Párnosť – párnym čísliciam zodpovedajú párne kódy, nepárnym nepárne

Najpoužívanejší kód je pre : $v_3 = 8 \quad v_2 = 4 \quad v_1 = 2 \quad v_0 = 1$

Binárny kód	Dekadická číslica
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010-1111	nevyužité kódy

Pre dekadické číslo $2357_{10} = 0010\ 0011\ 0101\ 0111_{BCD}$

Pozn.: Môžeme sa stretnúť s pojmami zhustený a nezhustený zápis čísel v BCD kóde. Posledne uvedený príklad zodpovedá zhustenému zápisu. V prípade nezhusteného kódu sa každá číslica kóduje do osobitného bajtu, doplnením núl do horných štyroch bitov

$2357_{10} = \underline{0000\ 0010}\ \ \underline{0000\ 0011}\ \ \underline{0000\ 0101}\ \ \underline{0000\ 0111}$

Sčítanie a odčítanie v BCD kóde

Tento kód nie je symetrický, preto pri aritmetickom sčítaní a odčítaní je treba upravovať výsledok, v prípade prenosu do vyššieho rádu, alebo výpožičke z vyšších rádov.

Súčet dvoch operandov kódovaných v BCD kóde sa vykonáva rovnakým spôsobom ako súčet dvoch binárnych celých čísel, majme tri príklady :

Vykonajme súčet čísel kódovaných v BCD kóde 23+45, 23+29, 27+29

23	0 0 1 0	0 0 1 1	
+ 45	0 1 0 0	0 1 0 1	
	0		< AC >
68	0 1 1 0	1 0 0 0	$[68]_H$

V tomto prípade BCD kód výsledku sčítania zodpovedá BCD kódu správneho výsledku.

23	0 0 1 0	0 0 1 1	
+ 29	0 0 1 0	1 0 0 1	
	0		< AC >
52	0 1 0 0	1 1 0 0	$[4C]_H$

27	0 0 1 0	0 1 1 1	
+ 29	0 0 1 0	1 0 0 1	
	1		< AC >
56	0 1 0 1	0 0 0 0	$[50]_H$

V prvom prípade je kód dolnej štvorice bitov nesprávny, v druhom prípade obidve číslice patria medzi správne BCD kódy, ale výsledok je nesprávny (prenos do vyššieho rádu medzi bitmi 3 a 4) .

Po vykonaní súčtu BCD čísel treba testovať
- buď prenos do vyššieho rádu z každej štvorice bitov
- alebo, či kód číslice patrí do množiny kódov číslic 0 až 9
- alebo je výsledná číslica správna

Ak nastane jeden z dvoch prvých prípadov, vtedy vykonáme opravu pripočítaním čísla 6 na príslušnom ráde

23	0010	0011	
+ 29	0010	1001	
	0		$< AC >$
52	0100	1100	$[4C]_H$
	+ 0000	0110	$[06]_H$
	0101	0010	$[52]_H$

27	0010	0111	
+ 29	0010	1001	
	1		$< AC >$
56	0101	0000	$[50]_H$
	+ 0000	0110	$[06]_H$
	0101	0110	$[56]_H$

V obidvoch prípadoch sme získali po korekcii správny kód výsledku.
V prípade odčítania môže nastať rovnaká situácia ako pri sčítaní, že dôjde k podtečeniu medzi štvoricami bitov alebo k nesprávnemu kódu číslice.

53	0101	0011	
- 29	0010	1001	
	1		< *AC* >
24	0010	1010	2*A*
	- 0000	0110	06
	0010	0100	24

V tomto prípade vo výsledku je neplatný kód číslice s najnižšou váhou a došlo k podtečeniu medzi bitmi 3 a 4.

Súčin celých čísel bez znamienka

Majme dva binárne osembitové operandy

$$A = a_7 2^7 + a_6 2^6 + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

$$B = b_7 2^7 + b_6 2^6 + \ldots + b_1 2^1 + b_0 2^0$$

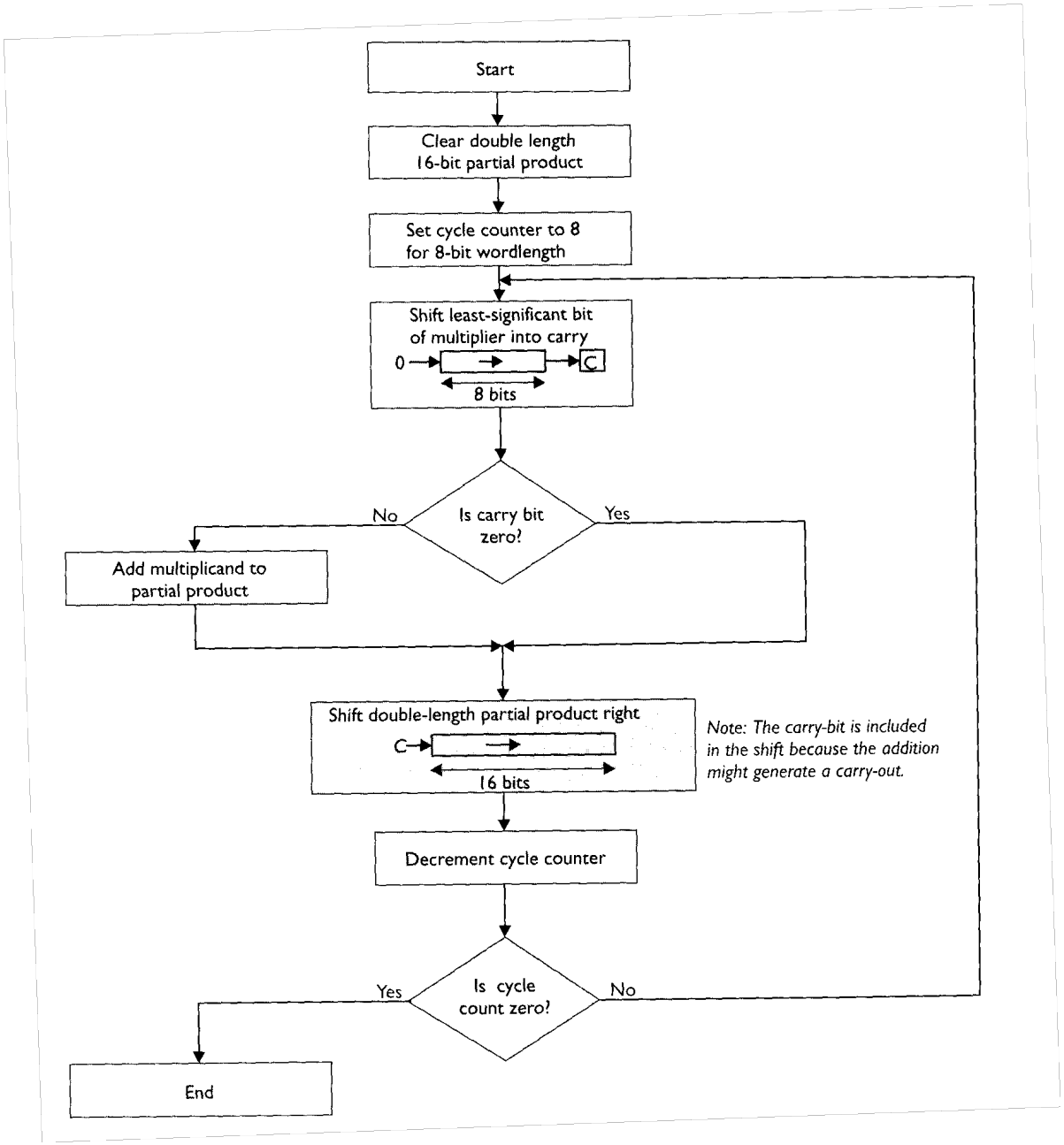
$$S = A.B = A.(b_7 2^7 + b_6 2^6 + \ldots + b_1 2^1 + b_0 2^0) =$$

$$b_7 A2^7 + b_6 A2^6 + \ldots + b_1 A2^1 + b_0 A2^0$$

Príklad :

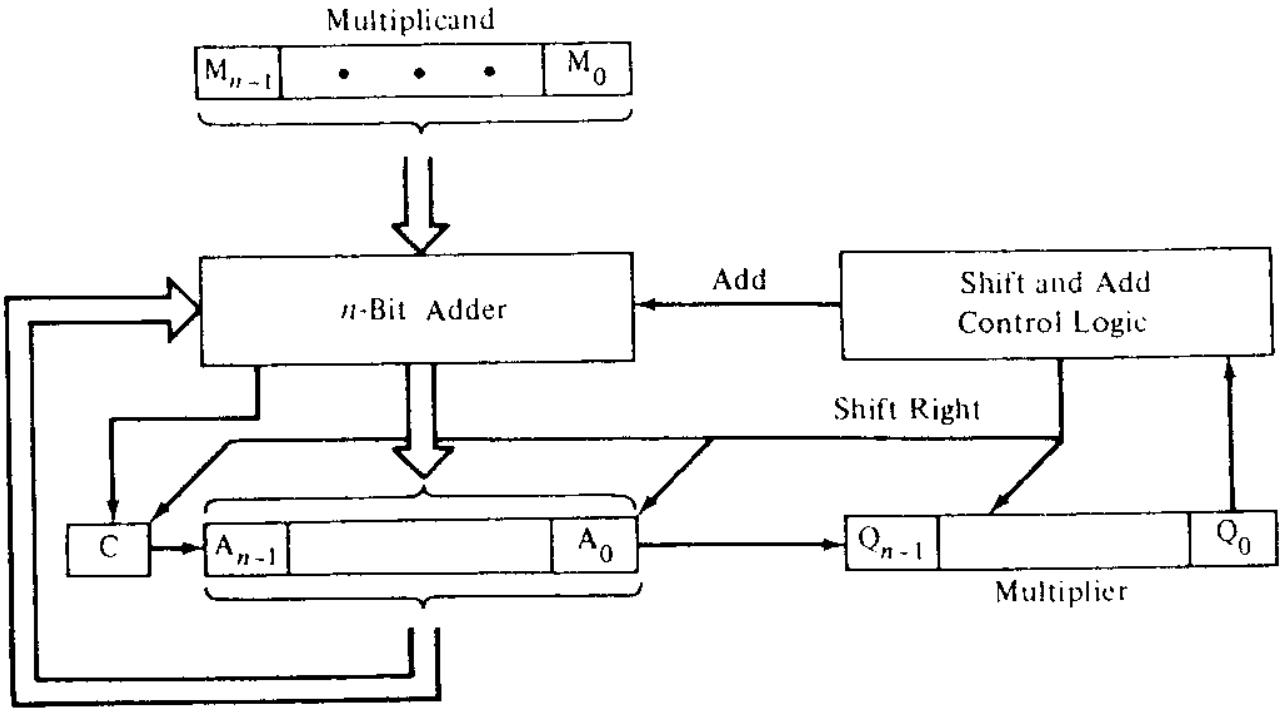
$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & (11)_{10} \\
 & & & * & 0 & 1 & 1 & 0 & (6)_{10} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \quad (11)_{10} * 2^1 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
+ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \quad (11)_{10} * 2^2 \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \quad 64 + 2 = 66
\end{array}
$$

Ak sú operandy n-bitové, výsledok bude 2n-bitový.


Start
Clear double length 16-bit partial product
Set cycle counter to 8 for 8-bit wordlength
Shift least-significant bit of multiplier into carry
0
C
8 bits
Is carry bit zero?
No
Yes
Add multiplicand to partial product
Shift double-length partial product right
C
16 bits
Note: The carry-bit is included in the shift because the addition might generate a carry-out.
Decrement cycle counter
Is cycle count zero?
Yes
No
End

```
unsigned long sucin(unsigned short a,unsigned short b)
{
   unsigned long result = 0,mult = a;
  int i;
  while(b){
   if (b & 1)result+ = mult;
  mult <<= 1;b >>= 1;
  }
  return result;
}
```

Realizácia násobenia v jazyku C



(a) Block Diagram

Blokov schéma celočíselnej násobičky

Súčin celých čísel (so znamienkom)

Budeme uvažovať len čísla vyjadrené v doplnkovom kóde. Na to aby algoritmus násobenia bol použiteľný, okrem možnosti previesť operandy na kladné čísla, a potom upraviť výsledok podľa výsledného znamienka súčinu, je potrebné korigovať výsledok získaný popísaným algoritmom.

Majme operandy X a –Y, v doplnkovom kóde -Y=2^n-Y, potom

$$X(-Y) \rightarrow X(2^n - Y) = 2^n X - XY$$

obrazom -XY je v doplnkovom kóde

$$X(-Y) \rightarrow 2^{2n} - XY$$

potom musíme korigovať výsledok pripočítaním čísla

$$korekcia = \left(2^{2n} - XY\right) - \left(2^{n} X - XY\right) = 2^{2n} - 2^{n} X =$$
$$= 2^{n} \left(2^{n} - X\right)$$

čo je vlastne o n-bitov posunutý operand (–X) zobrazený v doplnkovom kóde.

Príklad : Majme čísla 15 a –13. Na ich zobrazenie potrebuje 5 bitov 1 bit znamienkový a 4 bity na zobrazenie čísel 13 a 15. Výsledok násobenia týchto čísel bude 10 bitový.

$15 = 01111_2 \quad 13 = 01101_2$

$-15 = 10000 + 1 = 10001$

$-13 = 10010 + 1 = 10011$

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	(285)
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	(-195)

$0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 + 1$

$0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 = 128 + 64 + 3 = 195$

Podobná situácia nastane v prípade, že sú obidva operandy záporné

$$(-X)(-Y) \rightarrow (2^n - X)(2^n - Y) = 2^{2n} - 2^n X - 2^n X + XY$$

Aby bol výsledok spravny musíme pripočítať k výsledku $2^n.X$ a $2^n.Y$, a ignorovať jednotku v Carry Bite.

Booth-ov algoritmus

Algoritmus dáva správny výsledok pre všetky kombinácie kladných a záporných operandov.

V tomto prípade sa testujú dva bity násobiteľa naraz, okrem aktuálneho bitu sa testuje najbližší nižší bit (môžu nastať tri situácie) :

3. v aktuálnom bite je 1 a nasledujúcom je 0 – potom odčítame násobenca od výsledku
4. v aktuálnom bite je 0 a nasledujúcom je 1 – potom pripočítame násobenca k výsledku
5. ak sú uvedené bity rovnaké nerobíme nič
6. ak pri pripočítaní sa nastaví carry bit, ten sa ignoruje
7. ak je testované LSB násobiteľa, nižší bit sa predpokladá, že je nulový
8. pri posune medzivýsledku sa používa aritmetický posun (kopíruje sa MSB)

$15 = 01111_2 \quad -15 = 10000 + 1 = 10001$

$13 = 01101_2 \quad -13 = 10010 + 1 = 10011$

$15 * 13 = 195$

C	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	1	1	0	1	0	* (-)
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0								
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0								(→)
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0		0	1	1	0	1		(+)
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0								
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0								(→)
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	1	1	0	1		(-)
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0								
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0								(→)
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0		0	1	1	0	1		(→)
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0		0	1	1	0	1		(+)
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0								
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0								(→)
1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	= 128 + 64 + 3 = 195							

$15 = 01111_2 \quad -15 = 10000 + 1 = 10001$

$13 = 01101_2 \quad -13 = 10010 + 1 = 10011$

$15 * (-13) = -195$

C	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	1	0	* (-)
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0								
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0								(→)
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0		1	0	0	1	1		(→)
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0		1	0	0	1	1		(+)
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0								
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0								(→)
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0		1	0	0	1	1		(→)
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0		1	0	0	1	1		(-)
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0								
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0								(→)
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1		$= -(0011000010 + 1) = -(0011000011) = -195$						

Idea Booth-ovho algoritmu

$$A*(00111110) = A*(2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1) = A*(2^6 - 2^1)$$

$$2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 62$$

$$2^6 - 2^1 = 64 - 2 = 62$$

Pri násobení namiesto piatich súčtov opernadu A s medizvýsledkom násobenia, stačí jeden súčet a jeden rozdiel posunutého operandu A.
Dá sa ukázať podobná vlastnosť v prípade násobenia čísel kódovaných v doplnkovom kóde.

Urýchlenie násobenia

- **vyhľadávacia tabuľka** (look-up table) adresa do tabuľky dvojica operandov, obsah tabuľky výsledok súčin operandov

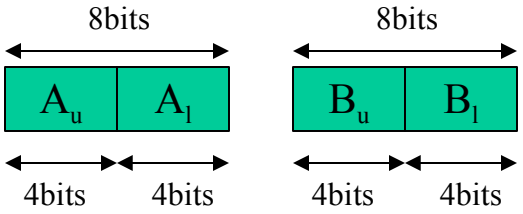
problémom je veľkosť tabuľky – operandy 8-bitové $\Rightarrow$ adresa 16-bitová $\Rightarrow 2^{16}=65536$ výsledkov, výsledky sú 16-bitové $\Rightarrow$ potrebná pamäť 128 kB

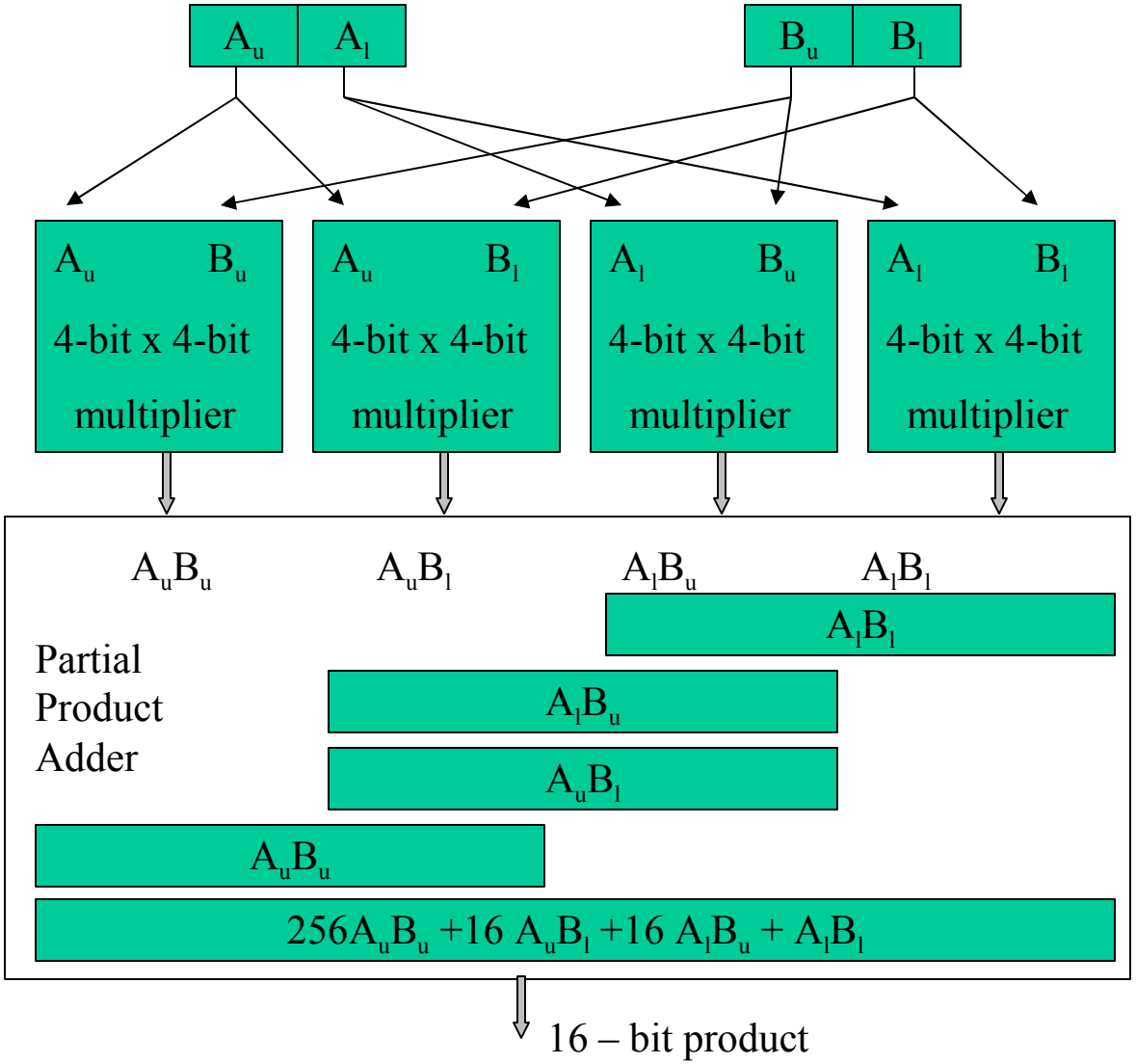
- modifikáciou tejto myšlienky je rozdelenie operandov na menšie časti

$$
\begin{aligned}
34 \times 27 &= (3 \times 10 + 4)(2 \times 10 + 7) \\
&= 3 \times 2 \times 10^2 + 3 \times 7 \times 10 + 4 \times 2 \times 10 + 4 \times 7 \\
&= 6 \times 10^2 + 21 \times 10 + 8 \times 10 + 28 \\
&= 6 \times 10^2 + 29 \times 10 + 28 \\
&= 600 + 290 + 28 \\
&= 918
\end{aligned}
$$

$$A = A_u \times 16 + A_l \text{ and } B = B_u \times 16 + B_l$$

$$\text{Consequently, } A \times B = (A_u \times 16 + A_l)(B_u \times 16 + B_l)$$
$$= 256A_uB_u + 16A_uB_l + 16A_lB_u + A_lB_l$$





- alebo použitie hardvérovej násobičky realizovanej hradlovým polom (kombinačný obvod)

Podiel celých čísel bez znamienka

Pre celočíselné delenie platí

$$\frac{X}{Y} = P + \frac{Z}{Y} \quad alebo \quad X = P.Y + Z$$

$$\begin{array}{l} 575 : 25 = 23 \\ -\underline{50} \\ 75 \\ -\underline{75} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 575 : 45 = 12 \\ -\underline{45} \\ 125 \\ -\underline{90} \\ 35 \end{array}$$

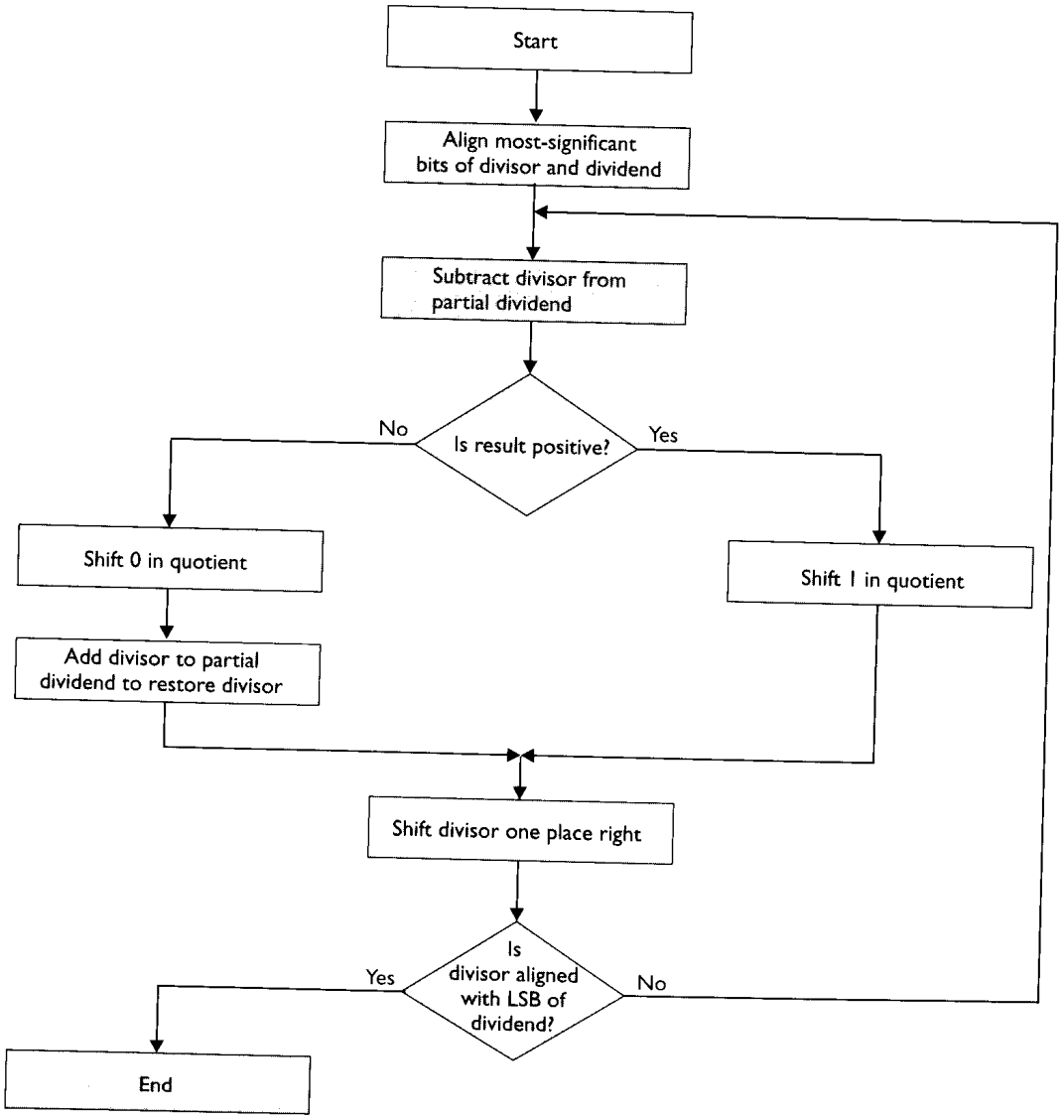
$575 = 1000111111_2 \quad 25 = 011001_2 \quad -25 = 100111_2$

$575 : 25 = 23$

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	(+)
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	(D > 0 P = 1)
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	(→)
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	(D < 0 P = 10)
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	()
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	(+)
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	(D > 0 P = 101)
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	(+)
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	(D > 0 P = 1011)
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(D > 0 P = 10111) (zvysok = 0)

$10111_2 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$

Bloková schéma :



Fi
for

Urýchlenie algoritmu :
po odčítaní deliteľa a zápornom medzivýsledku nepripočítať naspäť delenca, ale pripočítať delenec/2, pretože

-delenec+delenec/2=-delenec/2

čo je ekvivalentné pripočítaniu deliteľa naspäť a následnému odčítaniu polovice deliteľa.

```
short podiel(long delenec,short delitel)
{
   short result = 0;
   long del = delitel;
   int i = 0;
   if (delenec < 0 || delitel <= 0)return - 1;// chyba
    // zarovnanie delitela dolava
    while(!(del & 0x4000)){del <<= 1;  i++;}
   while(i--){
       result <<= 1;
      delenec- = del;
       if (delenec < 0){delenec+ = del;}
       else {result++;}
      del >>= 1;
  }
  return result;
}
```

Príznakové bity

Sú súčasťou príznakového registra (stavového slova procesora), ktorý agreguje okrem iného aj jednobitové informácie o výsledku aritmeticko-logickej operácie, medzi ktoré patria :

- (C), (CY) (Carry) (signalizácia prenosu do vyššieho rádu/ výpožičky z vyššieho rádu)

- (Z) (Zero) príznak nuly (všetky bity výsledku sú nulové)

- (S) (Signum) kopíruje MSB výsledku

- Overflow, Parity atď.

Význam príznakových bitov pri vetvení programu !!

Literatúra:

[1] Clements,A: The Principles of Computer Hardware, Oxford

[2] Stalling, W.: Computer Organization and Architecture, principles ...,