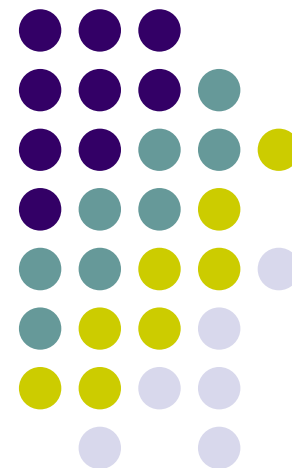


Numerické metódy riešenia diferenciálnych rovníc

Matematicko-počítačové
modelovanie
4. semester
2. prednáška



ODR s viacrozmerným fázovým priestorom



- Zaoberáme sa lineárnymi diferenciálnymi rovnicami typu:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{A}$ je matica rozmeru $n \times n$.

Takýto systém rovníc voláme

Lineárny systém ODR s konštantnými koeficientami

Analógia s prípadom $n=1$



Mocniny matice

- Nech je daná matica A rozmeru $n \times n$.
- $A^2 = A \cdot A$
- $A^k = A \cdot A^{k-1}$

$$e^A = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \dots$$

- Potom

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \dots$$



Základná veta

- Nech A je matica rozmeru $n \times n$. Riešením ODR

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

s počiatočnou podmienkou

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

je vektorová funkcia

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{At} \quad \text{krivka v } n\text{-rozmernom priestore}$$



Riešenie lin. systému ODR

- Prípad, pre navzájom rôzne nenulové reálne vlastné čísla
- Nájdeme vlastné čísla $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$ matice A
- Nájdeme vlastné vektory $\mathbf{v}_k, k = 1, 2, \dots, n$ matice A .
- vyjadríme počiatočnú podmienku v tvare

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k$$



Riešenie lin. systému ODR

- **Riešenie problému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ je potom vektorová funkcia**

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k$$

- **V ostatných prípadoch je situácia trochu zložitejšia**



Príklad

- Riešme homogénny lineárny systém diferenciálnych rovníc $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ s maticou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

- a začiatočnou podmienkou $x_1(0) = 1$
 $x_2(0) = 0$



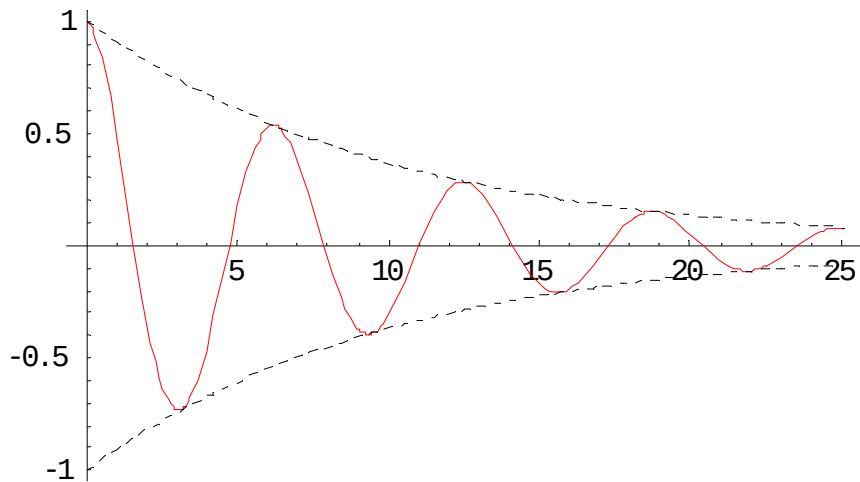
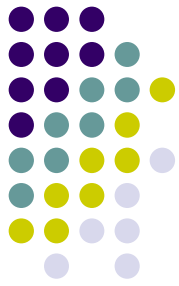
Príklad - riešenie

- Riešením je vektor:

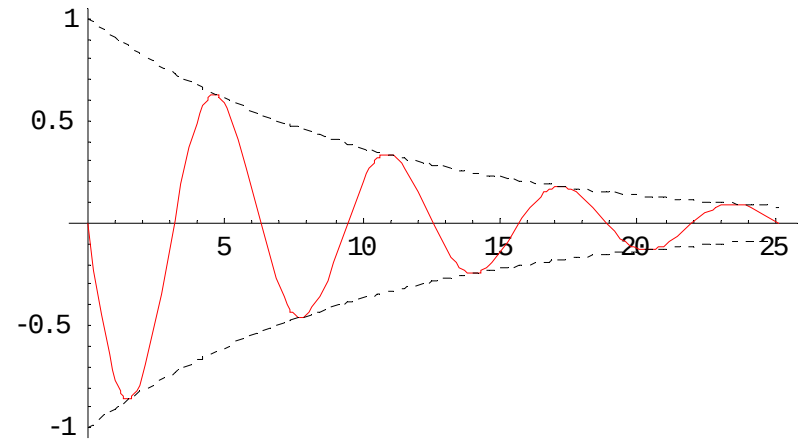
$$x_1(t) = e^{-0.1t} \cos t$$

$$x_2(t) = -e^{-0.1t} \sin t$$

Grafy zložiek vektora riešení

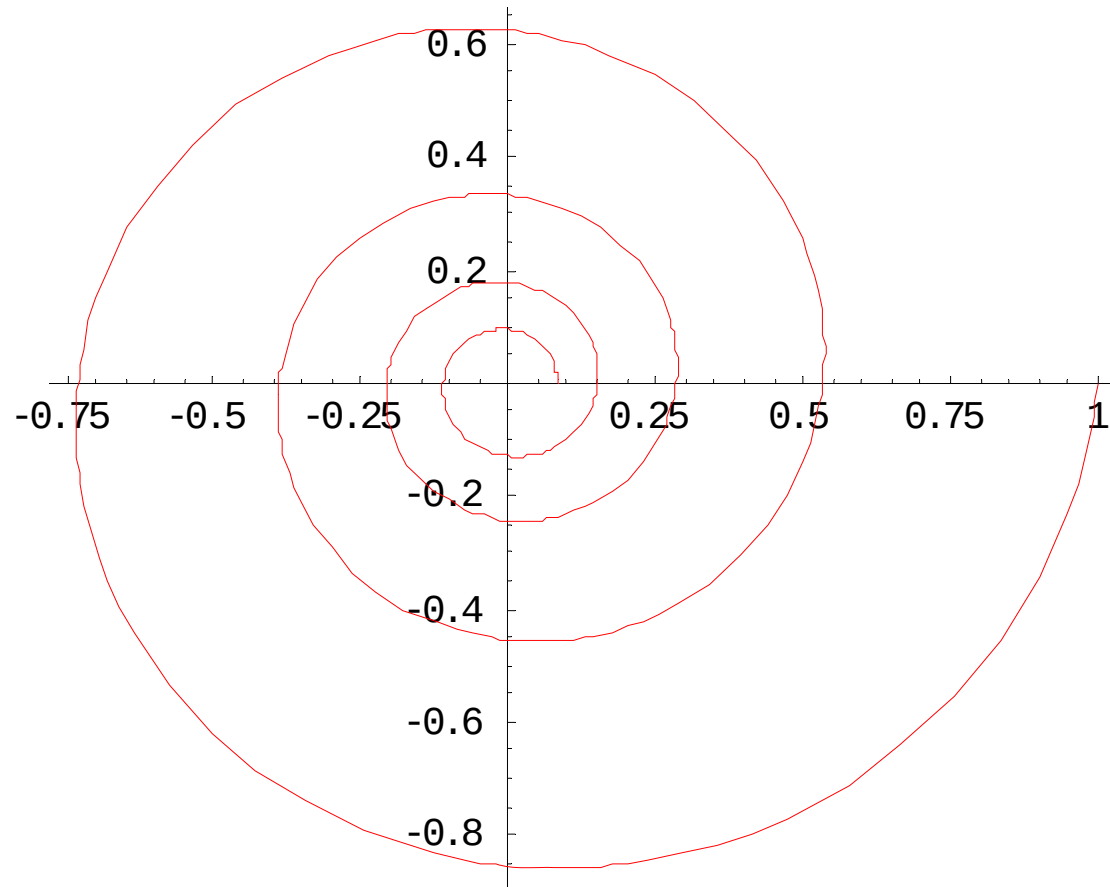
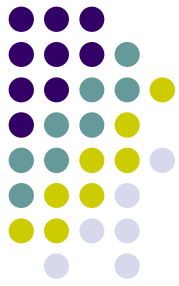


$x_1(t)$

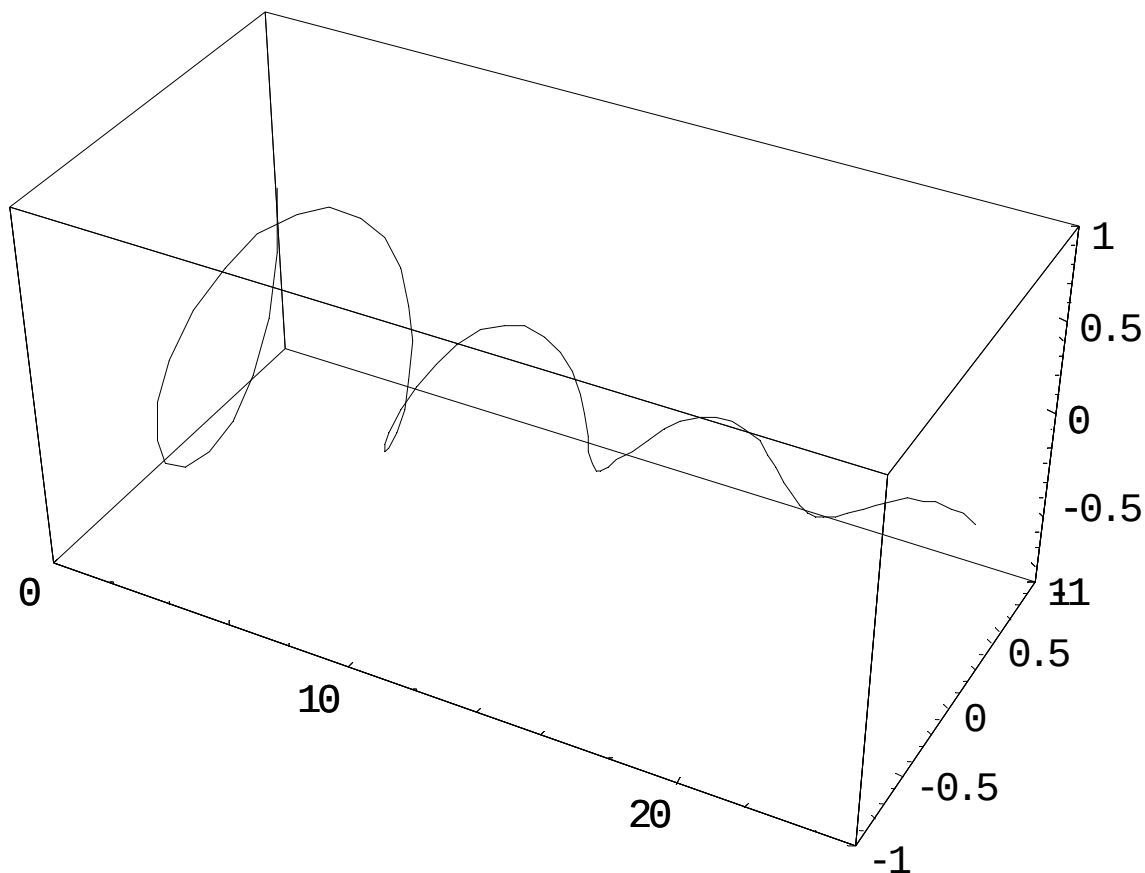


$x_2(t)$

Trajektória riešenia



Integrálna krivka



Klasifikácia stacionárnych bodov a fázové portréty v rovine



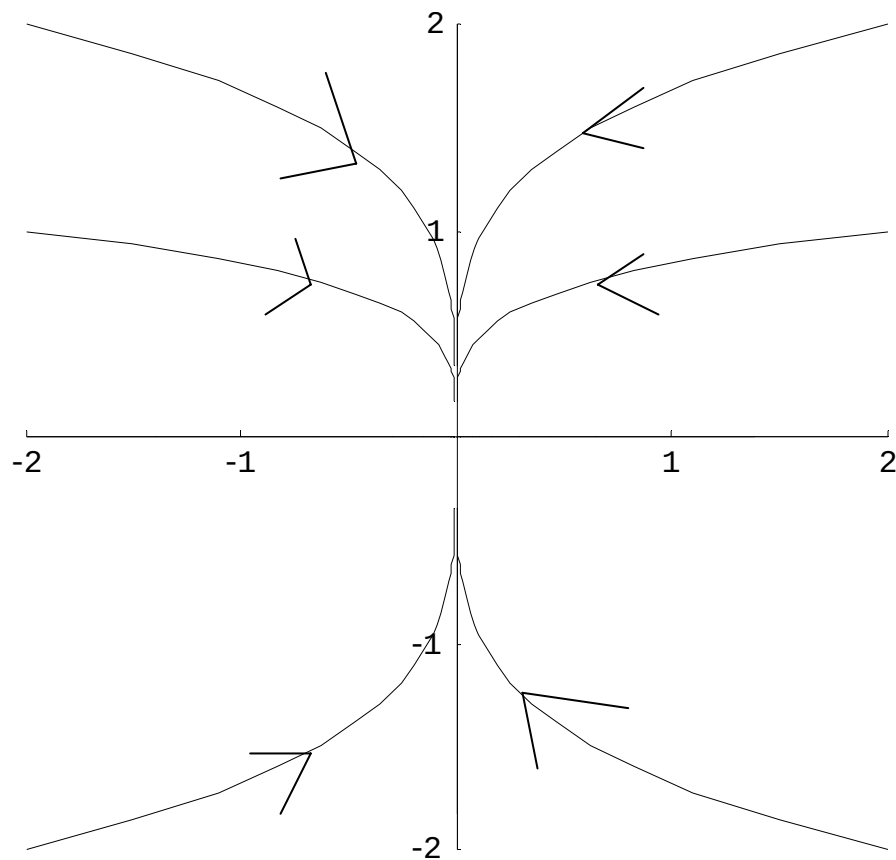
- Rozoberieme prípad $n=2$. Pre dvojdimenzionálnu úlohu má matica práve dve vlastné čísla môžu nastať len tieto možnosti:
- dve nenulové reálne vlastné čísla:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \quad \text{príťahujúci uzol}$$

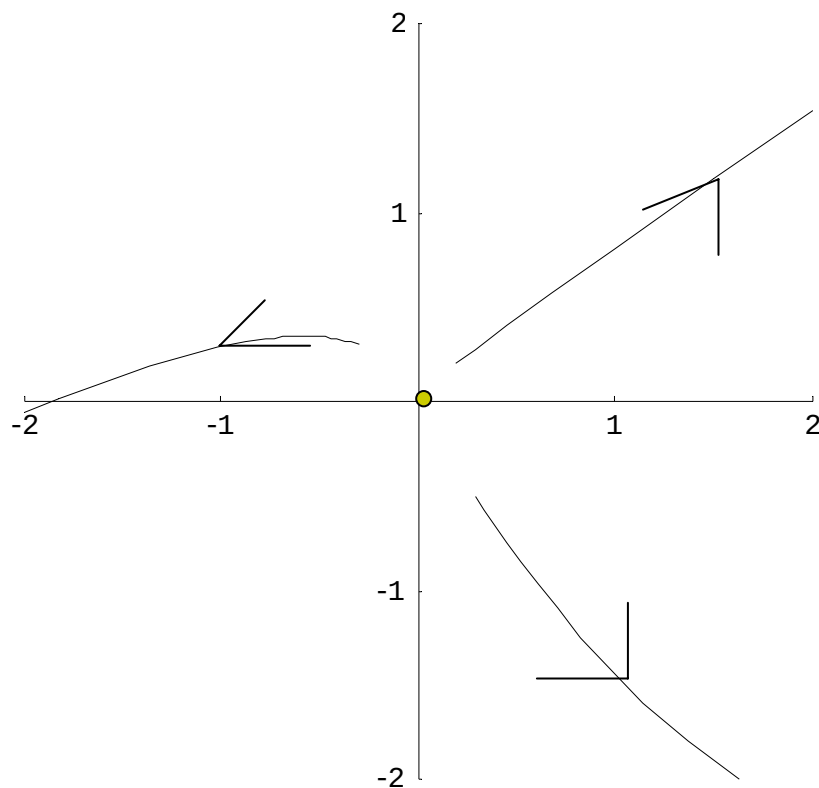
$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \quad \text{odstredivý uzol}$$

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{sedlo}$$

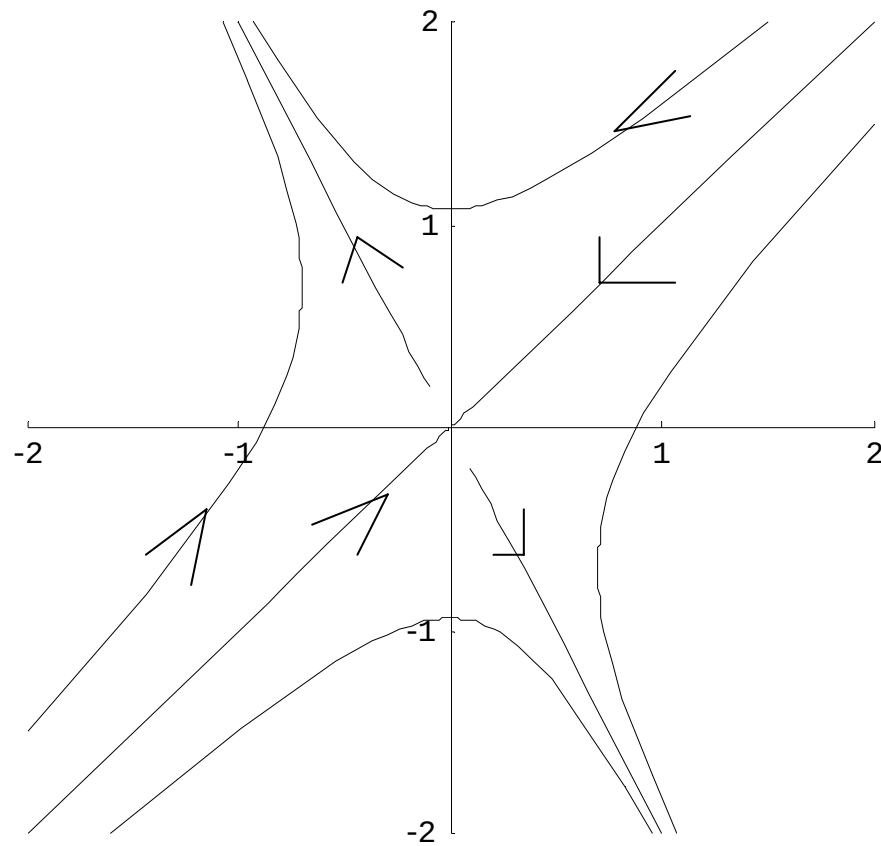
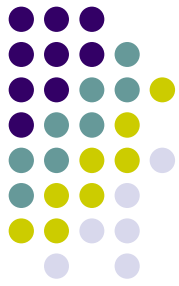
Prit'ahujúci uzol



Odstrediý uzol



Sedlo

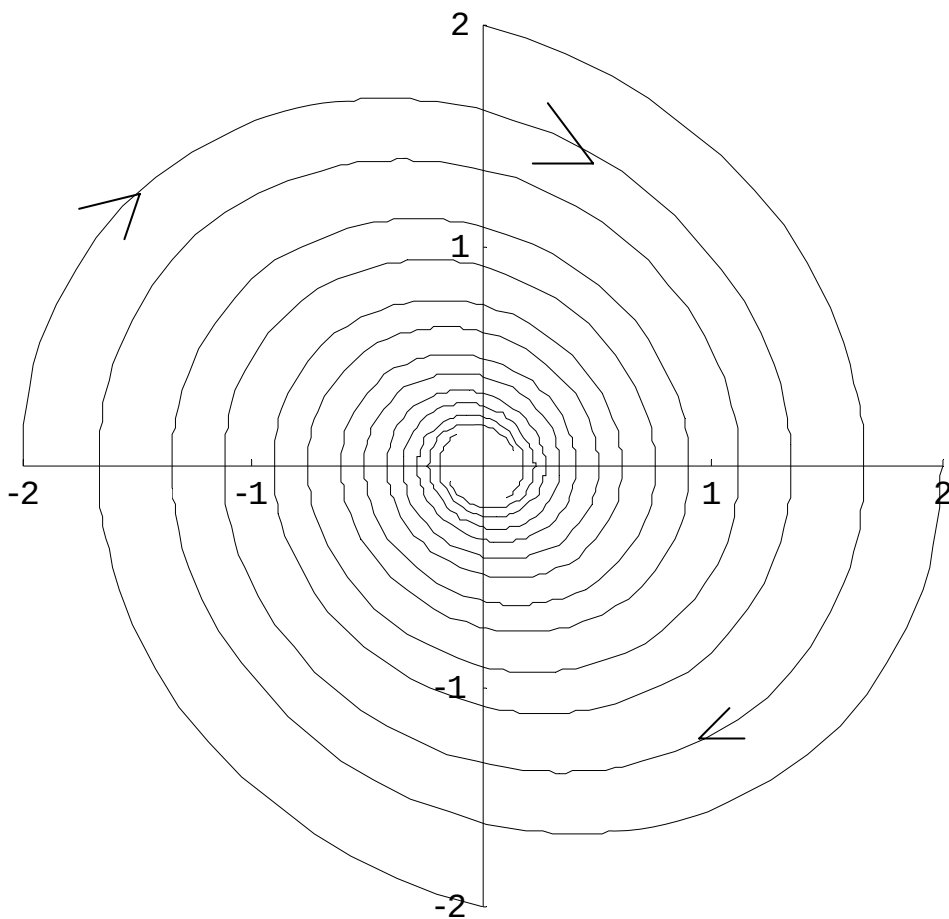


Klasifikácia stacionárnych bodov a fázové portréty v rovine

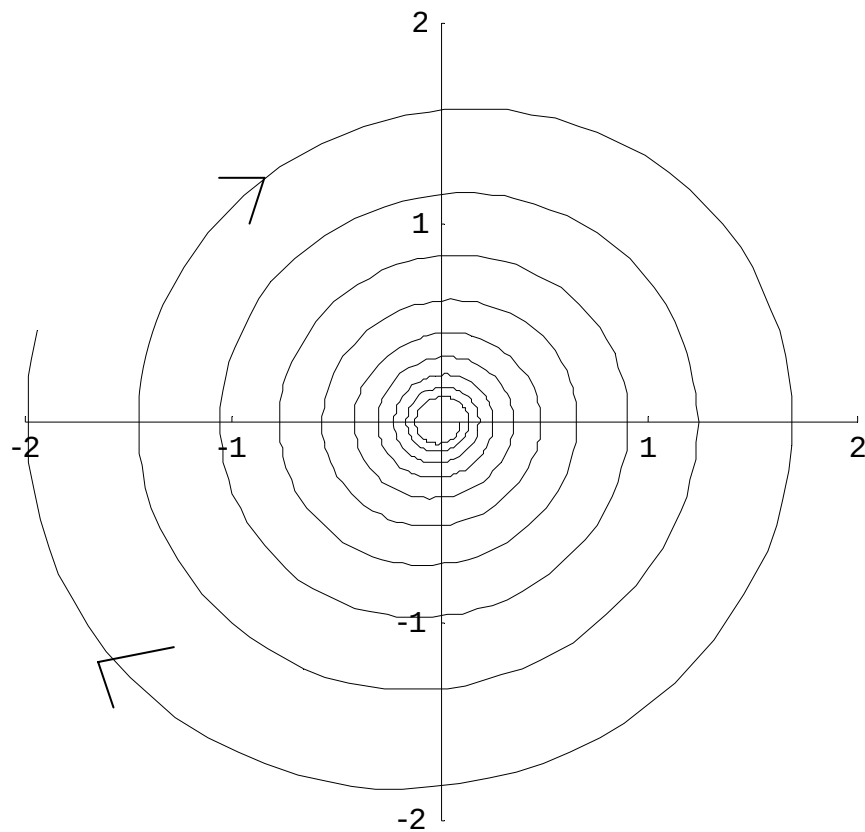


- **Nenulové komplexné vlastné čísla** $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
 - $\alpha < 0, \beta \neq 0$ **príťahujúce ohnisko**
 - $\alpha > 0, \beta \neq 0$ **odstredivé ohnisko**
 - $\alpha = 0, \beta \neq 0$ **cykly**
- **Jedno vlastné číslo je nulové- ustálené stavy**
tvoria podpriestor – priamku
- **obe vlastné čísla sú nulové - všetky body sú**
rovnovážne stavy

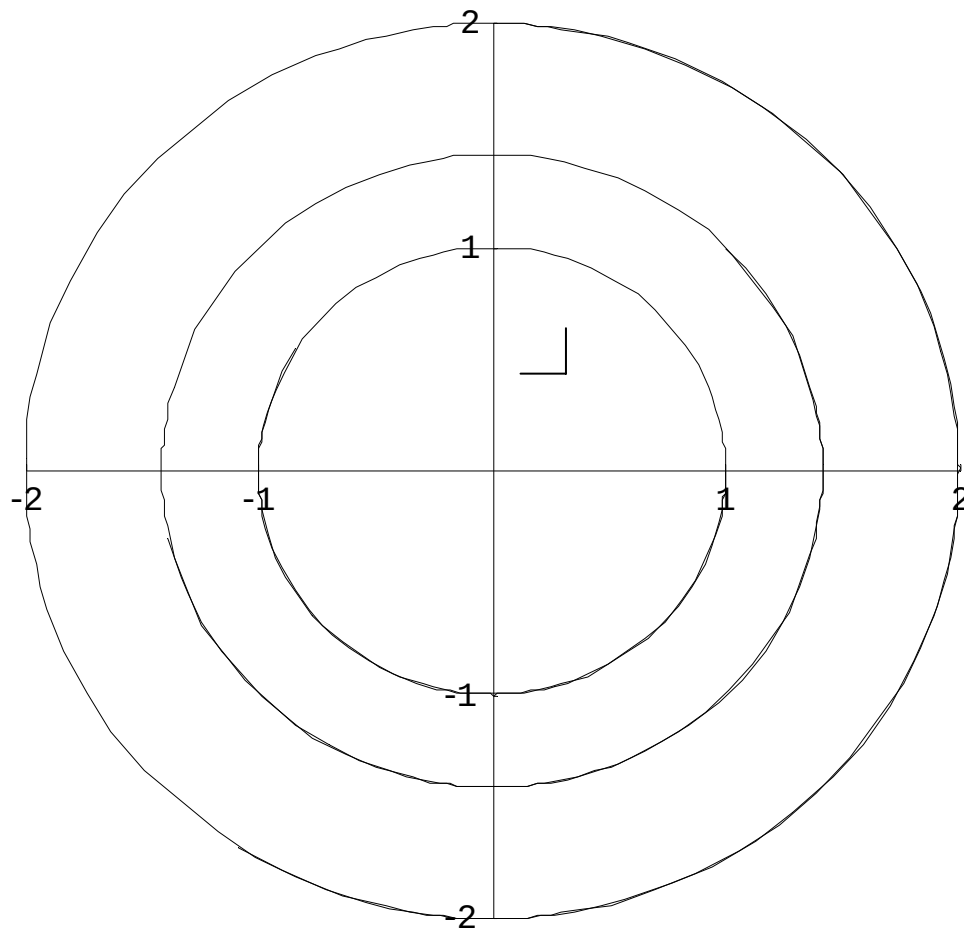
Prit'ahujúce ohnisko



Odstredivé ohnisko



Cykly





Nelineárne ODR

- Úloha $\mathbf{x}' = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{v}$ je vektorové pole fázovej rýchlosti vo fázovom priestore M z $\mathbb{R}^N$.
- Oveľa náročnejšie riešenie
- $\mathbf{x}_s$ je **kritický bod** vektorového poľa: $\mathbf{v}(\mathbf{x}_s) = 0$.
Ak je proces deterministický, teda existuje jediné riešenie pre ľubovoľnú počiatočnú podmienku, potom je $\mathbf{x}_s$ **ustáleným stavom**.



Nelineárne ODR

- Nech $\mathbf{x}$ je z malého okolia kritického bodu $\mathbf{x}_s$
- Z Taylorovho rozvoja máme:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_s) + \mathbf{v}'(\mathbf{x}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \frac{1}{2} \mathbf{v}''(\mathbf{x}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)^2 + \dots$$

- $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ vektor fázovej rýchlosti
- $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$ Jacobiho matica
- $\mathbf{v}''(\mathbf{x})$ Hessova matica (tenzor) vektorovej funkcie

Nelineárne ODR



$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_s) = 0$$

$\mathbf{x}_s$ je kritickým bodom

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}'(\mathbf{x}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$$

Lineárna funkcia (vektorová) premennej $\mathbf{x}$

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}''(\mathbf{x}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)^2 + \dots$$

malé členy druhého a vyššieho rádu -zanedbáme

Nelineárne ODR



$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_s) + \mathbf{v}'(\mathbf{x}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = \mathbf{v}'(\mathbf{x}_s)\mathbf{x} - \mathbf{v}'(\mathbf{x}_s)\mathbf{x}_s$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$



IS-LM model

- t - čas
- $r(t)$ - úroková miera v čase t
- $y(t)$ - hrubý domáci produkt v čase t
- **Rovnováha na trhu:**

$$Inv + G = S + T$$

- Inv - investície
- G - štátne výdaje
- S - úspory
- T - dane



IS-LM model

$$Inv = i_0 - i_1 r(t)$$

$$S = (1 - b)(y(t) - T) - a$$

- i_0 - nezávislé investície
- i_1 - úroková senzitivita investícií
- a - nezávislá spotreba
- b - marginálna spotreba



IS-LM model

Rovnováha na finančnom trhu:

$$L=M$$

- L - peňažný dopyt
- M - množstvo peňazí
- c_0 - nezávislý peňažný dopyt
- c_1 - príjmová elasticita peňažného dopytu
- c_2 - úroková elasticita peňažného dopytu
- $L = c_0 + c_1 y(t) - c_2 r(t)$



IS-LM model

Ekonomická analýza:

- časová zmena úrokovej miery a národného dochodku je úmerná odchýlke od rovnováhy na finančnom resp. kapitálovom trhu:
- $y'(t) = k_1 (Inv + G - (S + T))$
- $r'(t) = k_2 (L - M)$



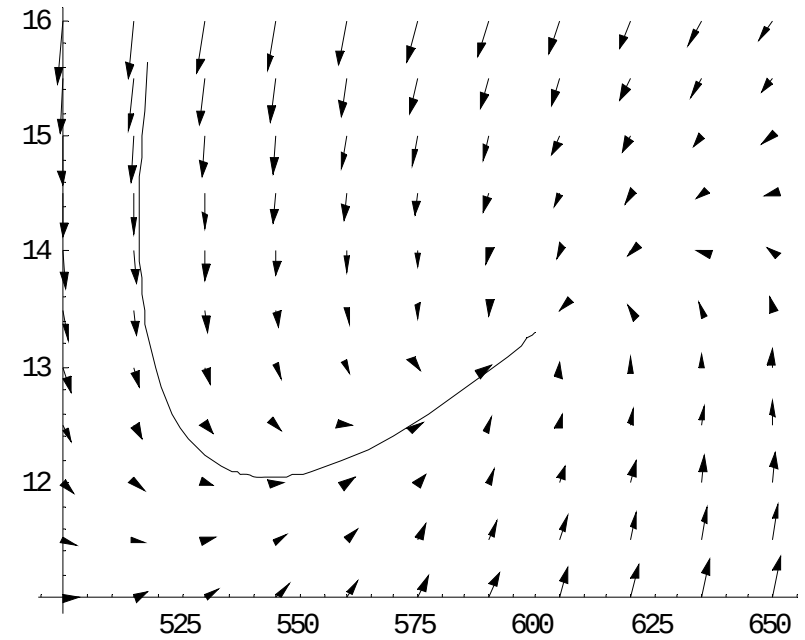
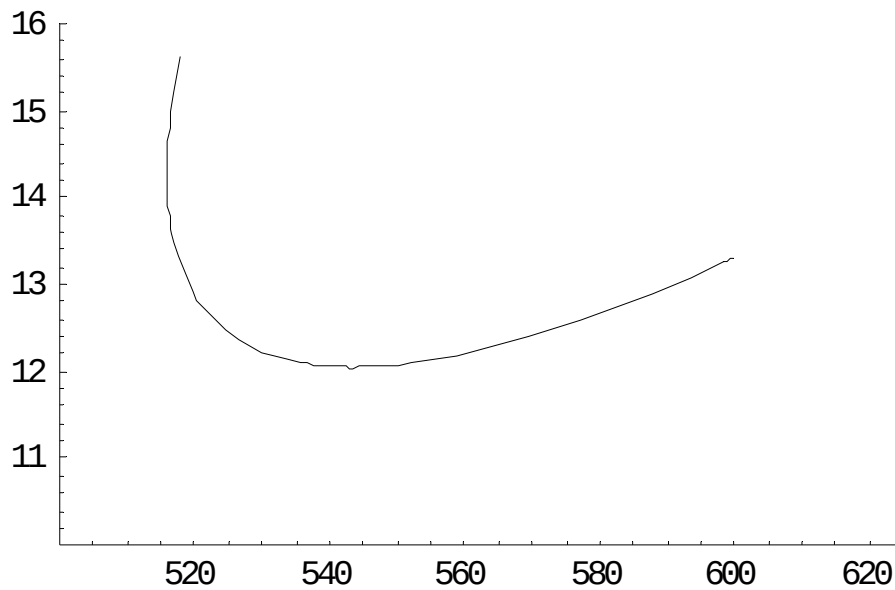
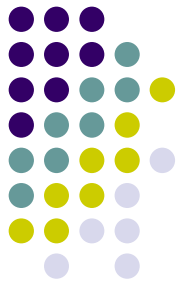
IS-LM model

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$$

Zaujímá nás rovnovážny stav

Rovnovážny stav



Rovnovážny stav

