Obsahova napln cvicenia

Vypocet normaly na elementoch (s linearnou a kvadrat. aprox.)

Vytvorte vypoctovy program (podprogram) pre vypocet normaly na hranicnych elementoch v 2-d a 3-d ulohach.

Postup pri vypracovani vypoctoveho programu:

- Definovat suradnice uzlovych bodov uvazovaneho hranicneho elementu (podla radu interpolacie)
- Pomocou function definovat tvarove funkcie a ich prve derivacie (aby sa dali aplikovat pre rozne hodnoty argumentu) pre uvazov. typ elementu
- Naprogramovat vypocet nasledovnych velicin:

d=2: $h_i = \sum_a \eta_i^{aq} N'^a(\xi)$, $h = \sqrt{h_i h_i}$, $t_k = h_k / h$, $n_i = \varepsilon_{ik3} t_k$

d=3: $h_j = \sum_a \eta_j^{aq} N_{,1}^a(\xi_1,\xi_2)$, $k_m = \sum_a \eta_m^{aq} N_{,2}^a(\xi_1,\xi_2)$, $g_i = \varepsilon_{ijm} h_j k_m$, $g = \sqrt{g_i g_i}$, $n_i = g_i / g$

Test: (a) **normala na usecke AB**: A(1,0) , B(2,0)

[Hint: krajne uzly su v bodoch A, B a v pripade kvadr. approx. druhy uzol lezi v strede medzi A a B; vypocet normaly na usecke nezavisi na polohe bodu, v ktorom ju pocitame]

(b) **normala v bode** $C(\cos 48^o, \sin 48^o)$ **na kruh. obluku AB** so stredom S(0,0) : $A(\cos 40^o, \sin 40^o)$, $B(\cos 50^o, \sin 50^o)$

Hint: kartezske suradnice uzlov elementu : $\eta_1^{1q} = \cos(40^o)$, $\eta_2^{1q} = \sin(40^o)$

$\eta_1^{2q} = \cos(45^o)$, $\eta_2^{2q} = \sin(45^o)$

$\eta_1^{3q} = \cos(50^o)$, $\eta_2^{3q} = \sin(50^o)$

vypocitat lok. surad. ξ^c bodu C z rovnice:

$$\cos(48^o) = \sum_{a=1}^{3} \eta_1^{aq} N^a(\xi^c) = \frac{\xi^c}{2}(\xi^c - 1)\cos(40^o) + (1-\xi^c)(1+\xi^c)\cos(45^o) + \frac{\xi^c}{2}(\xi^c + 1)\cos(50^o)$$

$$\downarrow$$

kvadrat. rov.: $\left(\xi^c\right)^2 \alpha + \xi^c \beta + \gamma = 0 \;\Rightarrow\; \xi^c = \frac{1}{2\alpha}\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right)$

kde: $\alpha = \frac{1}{2}\cos(50^o) + \frac{1}{2}\cos(40^o) - \cos(45^o)$, $\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(50^o) - \cos(40^o)\right)$,

$\gamma = \cos(45^o) - \cos(48^o)$

nasledne vypocitat $h_i = \sum_a \eta_i^{aq} N'^a(\xi^c)$, …

Numerical results: $\xi^c = 0.600469637837701$

$n_1^{ex}(\zeta^c) = 0.6691305739E+00$, $n_1^{num}(\zeta^c) = 0.6691110436E+00$, % error = -0.2918753657E-02

$n_1^{ex}(\zeta^c) = 0.7431448547E+00$, $n_1^{num}(\zeta^c) = 0.7431624394E+00$, % error = 0.2366250744E-02

(c) **normala na plosnom elem. ABCD**: A(1,0) , B(2,0) , C(2,1) , D(1,1)

Pouzite 4-uholnikovy element s kvadratickou aproximaciou (serendipity, t.j. 8-uzlovy)

Porovnat vysledky numericky vypocitanych normal s exaktnymi hodnotami v jednotlivych prikladoch.

Numericke integracie

Vytvorte vypoctovy program (podprogram) pre num. integraciu v 1-rozmernom integrali pomocou **standardnej Gaussovej kvadratury**

Postup pri vypracovani vypoctoveho programu:

- Transformacia integracnej premennej $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$, $\xi \in [-1,1]$

  (pretoze Gaussove body ξ^i a im odpovedajuce vahy W^i su pre normalizovany interval $\xi^i \in (-1,1)$)
- Naprogramovat vypocet vseobecneho integralu pomocou funkcnych hodnot v integracnych bodoch

  $$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(x(\xi)\right)\frac{b-a}{2}d\xi = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{N} f\left(x(\xi^i)\right)W^i$$ (sumacia cez N Gauss. integr. bodov)

Test: napr. pre $f(x) = 1 + x^2$; kedy exaktna hodnota je: $\int_a^b f(x)dx = x\left(1 + x^2/3\right)\Big|_a^b = (b-a)\left(1 + (b^2 + a^2 + ab)/3\right)$

Pozn.: Gauss. body z intervalu $\xi^i \in (-1,1)$ su symetricky rozlozene okolo 0, a preto sa nacitavaju len kladne hodnoty a zaporne su tym tiez dostupne, pricom vahy pre kladnu a zapornu hodnotu suradnice su rovnake.

Numerical results: $N = 12$

$$I = \int_2^3 (1 + x^2)dx\,,\quad I^{ex} = 0.7333333333\text{E+01}\,,\quad I^{num} = 0.7333333333\text{E+01}\,,\quad \%\ \text{error} = 0.2220446049\text{E-13}$$

******

Postupujte podobne pre vypocet integralov s logaritmickou singularitou s pouzitim **logaritmickej Gaussovej kvadratury**, kedy

$$\int_0^1 f(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx = \sum_{i=1}^{N} f\left(x_L^i\right)W_L^i$$, kde x_L^i , W_L^i su suradnice Gauss. integr. bodov a im odpovedajuce vahy pre logaritmicku Gauss. kvadraturu ; $x_L^i \in (0,1)$

Test: napr. pre $f(x) = x^k$; kedy exaktna hodnota je:

$$\int_0^1 f(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\int_0^1 x^k \ln x\,dx = -\frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{(k+1)^2}$$, zvolte si $k \in \{0,1,2,...\}$

Porovnat vysledky numericky vypocitanych integralov pri pouziti rozneho poctu Gauss. bodov s exaktnou hodnotou.

Numerical results: $N = 6$

$$Y = \int_0^1 x^7 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad Y^{ex} = 0.1562500000\text{E-01}, \quad Y^{num} = 0.1562500165\text{E-01}, \quad \%\ \text{error} = 0.1053799896\text{E-04}$$