

Obsahova napln cvicenia

Numericke integracie

Pr.1: V integráloch $\gamma^{baq} = \int_d^u Q^a(\rho) v^q(\rho) \ln|\rho| d\rho$ na singulárnom elemente s kvadratickou interpoláciou odseparujte regulárnu a logaritmicky singulárnu časť ($\gamma^{baq} = \gamma_R^{baq} + \gamma_S^{baq}$), pri výpočte ktorých sa použijú regulárna a logaritmická Gaussova kvadratura. Uvažujte všetky tri možnosti pre polohu kolokačného bodu na singulárnom elemente Γ_q , t.j. (i) $\zeta^b = \eta^{1q}$, (ii) $\zeta^b = \eta^{2q}$, (iii) $\zeta^b = \eta^{3q}$.

Pr.2: Vykonajte rovnaký rozklad ako v Pr.1 pri použití lineárnej interpolácie (2-uzlový element). Vypočítajte numericky integrály γ^{b1q} a γ^{b2q} pre prípad $\zeta^b = \eta^{1q}$ jednak pri použití tohto rozkladu a tiež pri použití iba regulárnej Gaussovej kvadratury (bez špeciálneho pojednania logaritmickkej singularity). Výsledky numerických integrácií porovnajte s exaktnými hodnotami (ktoré je možné vypočítať v prípade lin. interpolácie): $\gamma^{b1q} = a^q (\ln 2 - 3/2)$, $\gamma^{b2q} = a^q (\ln 2 - 1/2)$, kde $a^q = \sqrt{(x_i^{2q} - x_i^{1q})(x_i^{2q} - x_i^{1q})}$ je dĺžka lineárneho elementu.

Hint: Lin. interpolácia: $N^1(\xi) = (1 - \xi)/2$, $N^2(\xi) = (1 + \xi)/2$

$$\text{sing. elem. } \zeta^b = \eta^{cq}: \text{ transf. integr. premennej } \xi \rightarrow \rho = \xi - \xi^c = \begin{cases} \xi + 1, & \xi^c = -1 \\ \xi - 1, & \xi^c = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\text{ak } \zeta^b = \eta^{1q}: \rho = \xi + 1 \rightarrow Q^a(\rho) = N^a(\rho - 1) \rightarrow Q^1(\rho) = 1 - \rho/2, \quad Q^2(\rho) = \rho/2, \quad \rho \in [0, 2]$$

$$\gamma^{baq} = a^q \int_0^2 Q^a(\rho) \ln \rho d\rho$$

Numerical results: linear element with end points: A(1,1), B(7,3),

	exact	numerical $\gamma^{baq} = \gamma_R^{baq} + \gamma_S^{baq}$	% error	numerical by only reg. Gauss	% error
γ^{b1q}	-0.2551492646E+01	-0.2551491094E+01	-0.6081E-04	-0.2525840742E+01	-0.1005E+01
γ^{b2q}	0.6107850142E+00	0.6107834627E+00	-0.2540E-03	0.6107194744E+00	-0.1073E-01