

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V
BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA**

**Modelovanie konštrukcií v metóde
konečných prvkov**

System ANSYS

Juraj Králik

BRATISLAVA, 2009

OBSAH

1. Úvod.....	5
2. Matematické a fyzikálne modelovanie v MKP	10
2.1 Priestorový stav napätosti.....	12
2.1.1 Stav napätosti a deformácie v bode telesa.....	12
2.1.2 Lineárne pružný materiál.....	14
2.2 Variačná formulácia MKP.....	15
2.3 Jednorozmerné úlohy.....	20
2.3.1 Prútové sústavy.....	20
2.3.2 Rovinné rámové sústavy.....	23
2.3.3 Priestorové rámové sústavy.....	27
2.4 Dvojrôzmerne úlohy.....	29
2.4.1 Rovinný stav napätosti a deformácie.....	29
2.4.2 Osovýmymetrický stav napätosti.....	32
2.4.3 Rovinné izoparametrické konečné prvky.....	33
2.4.4 Ohybový stav napätosti.....	37
2.5 Trojrozmerné úlohy.....	43
2.5.1 Priestorové konečné prvky.....	43
3. Stabilitné úlohy v mechanike konštrukcií.....	47
4. Dynamické úlohy v mechanike konštrukcií.....	48
4.1 Vlastné kmitanie.....	49
4.2 Vynútené kmitanie lineárnych sústav.....	50
4.2.1 Priama integrácia v čase.....	51
4.2.2 Metóda rozkladu do vlastných tvarov.....	54
4.3 Harmonická analýza.....	55
4.4 Spektrálna analýza.....	56
4.4.1 Spektrum odozvy akcelerácií.....	57
4.4.2 Metódy modálnej kombinácie.....	59
4.5 Modelovanie útlmu.....	61
4.6 Statická kondenzácia a Guyanova redukcia.....	63
5. Nelineárne úlohy v mechanike konštrukcií.....	66
5.1 Geometrická nelinearita.....	66

5.2 Materiálová nelinearita	69
5.2.1 Elasto-plastický materiál	70
5.2.2 Medzné funkcie	73
5.2.3 Elasto-väzkoplastický materiál.....	78
5.2.4 Nelineárny elastický materiál.....	80
5.2.5 Hyperelastický materiál.....	80
5.2.6 Vážkoelastický materiál	81
5.3 Riešenie nelineárnych rovníc	82
5.3.1 Newton-Raphsonova metóda.....	83
5.3.2 Modifikovaná Newton-Raphsonova metóda.....	84
5.3.3 Prírastkovo-iteračná alebo kvázi-Newtonova metóda.....	84
5.3.4 Metóda iterácie po oblúku	85
5.3.5 Kritériá konvergenencie	86
6. Úlohy prenosu tepla vedením.....	88
7. Modelovanie konštrukcií.....	91
7.1 Výpočtové modely a systém riadenia kvality.....	91
7.2 Zásady modelovania konečnými prvkami.....	96
7.3 Modelovanie inžinierskych úloh	100
7.4 Zaťaženie na konečných prvkoch.....	105
7.5 Okrajové podmienky na konečných prvkoch	108
7.6 Obvyklé chyby modelovania	108
7.7 Kontrola modelu.....	110
7.7.1 Kontrola analytikom.....	110
7.7.2 Kontrola softvérom.....	110
7.8 Zásady modelovania.....	111
7.9 Tvar prvku a jeho degenerácia	112
7.10 Diskretizácia oblasti na konečné prvky	115
7.11 Symetria a asymetria	117
8. Systém ANSYS.....	121
8.1 Základné typy konečných prvkov	121
8.2 Preprocesor	130
8.2.1 Priame generovanie prvkov	132
8.2.2 Generovanie telesa pomocou booleovských operácií.....	136
8.3 Riešič	141

8.4 Postprocessor	144
8.5 Jazyk APDL.....	146
9. Statika v systéme ANSYS.....	150
9.1 Priehradová konštrukcia	150
9.1.1 Výpočet pomocou príkazov v okne „Input Line“	151
9.1.2 Výpočet v interaktívnom režime pomocou GUI	153
9.1.3 Výpočet pomocou makier.....	158
9.1.4 Výsledky výpočtu.....	158
9.2 Rámová konštrukcia s vnútorným kĺbom.....	159
9.3 Generovanie uzlov a prvkov rámu kopírovaním	166
9.4 Riešenie poschodového rámu	170
9.5 Rovinná stenová konštrukcia.....	172
9.6 Rovinná stenová konštrukcia s otvormi	176
9.7 Dosková konštrukcia	178
10. Stabilita v systéme ANSYS.....	182
11. Dynamika v systéme ANSYS	184
12. Nelinearita v systéme ANSYS	188
13. Optimalizácia v systéme ANSYS	191
14. Termická analýza v systéme ANSYS	196
15. Superelementy a submodely v systéme ANSYS.....	201
16. Metóda adaptívnych sietí v systéme ANSYS	203
17. Stručný prehľad príkazov v systéme ANSYS.....	206
18. Knižnica prvkov v systéme ANSYS	227
Dodatok A.....	231
Dodatok B.....	234
Dodatok C.....	237
19. Literatúra	238
20. Zoznam obrázkov	240
21. Zoznam tabuliek.....	241
22. Zoznam skratiek a symbolov.....	242
23. Index.....	250

1. ÚVOD

S rozvojom výpočtových prostriedkov v druhej polovici dvadsiateho storočia nastal aj rozvoj výpočtových metód orientovaných na algoritmizáciu inžinierskych úloh na báze metódy konečných prvkov. Od riešenia jednotlivých úloh stavu napätosti a deformácie od vplyvu vonkajšieho prostredia sa prešlo ku komplexnému riešeniu vzájomného spolupôsobenia systému deformovateľných telies (prvkov) za zdokonaľovania fyzikálnych a geometrických charakteristík novodobých materiálov a konštrukcií. Na jednej strane je tu rozvoj výpočtových modelov a metód na získanie čo najvernejšieho obrazu o stave namáhania jednotlivých konštrukčných prvkov a na druhej strane zdokonaľovanie grafických a výpočtových metód na optimálny návrh a posúdenie bezpečnosti a spoľahlivosti konštrukcie ako celku. Celý proces projektovania sa stal plne automatický a úlohou inžiniera-projektanta je nielen zostaviť výpočtový model z vhodných prvkov, definovať okrajové podmienky, geometrické a fyzikálne charakteristiky modelu, zvoliť vhodnú výpočtovú metódu a jej parametre na riešenie úlohy, ale aj analyzovať dosiahnuté výsledky, verifikovať výpočtový model a vyhodnotiť stav bezpečnosti a spoľahlivosti navrhovanej konštrukcie. Súčasné špičkové softwarové prostriedky používané v projekčnej praxi sú navzájom kompatibilné od štádia zadania úlohy až do štádia zhotovenia výkresovej dokumentácie analyzovanej a navrhovanej konštrukcie. Mnohé procesy v automatickom systéme projektovania prebiehajú akoby v „čiernej skrinke“ a proces overovania dosiahnutých výsledkov sa stáva najvýznamnejším štádiom v projekčnej činnosti. V prípade projektov významnejších stavieb investor všade vo svete vyžaduje kontrolný výpočet na inom programe, resp. inom výpočtovom modeli. Projektant je zodpovedný pred zákonom za svoj návrh a teda musí byť schopný verifikovať výpočtový model, ako aj dosiahnuté výsledky z hľadiska ich vierohodnosti. Bez poznania teoretického základu metódy konečných prvkov, fyzikálneho a matematického modelovania, verifikačných postupov a metód nemôže byť návrh konštrukcie bezpečný a spoľahlivý.

Cieľom tejto učebnice je zhrnúť súčasné poznatky z modelovania a výpočtov v metóde konečných prvkov (MKP). Sú tu uvedené základy teórie metódy konečných prvkov. Teoretické východiská a predpoklady pre riešenie prúťových, rámových, stenových, doskových, škrupinových a priestorových sústav pre statické a dynamické zaťaženie, pre lineárne a nelineárne chovanie sa materiálu a zviazaných problémov mechaniky konštrukcií.

Vo svete je známych viacero špičkových programov v oblasti MKP (ABAQUS, ADINA, ANSYS, ALGOR, CivilFEM, MARC, MSC PATRAN, NASTRAN, NISA II, COSMOS/M, SAP2000...), ktoré obsahujú najnovšie poznatky vo výpočtových analýzach statických a dynamických úloh, lineárnych a nelineárnych procesov a zviazaných problémov mechaniky. Tieto programy patria k finančne náročným programom a teda v praxi na Slovensku sa používajú rozsahom obmedzené aplikačné programy pre stavebnú prax (SCIA ESA PT, IDA NEXIS32, FEAT, RFEM a ďalšie).

Aplikácie tu uvedené sú ilustrované pod systémom **ANSYS**, produktu fy. SASI, v jednom z najväčších a najrozšírenejších MKP systémov na svete. ANSYS ako jeden z referenčných systémov v USA, krajinách ES a v Japonsku je používaný na štátne a vojenské projekty. Patrí medzi strategické SW, ktorých dovoz podlieha udeleniu licencie. Dňa 1.1.1992 udelil kongresový výbor v USA súhlas k vývozu SW ANSYS do vtedajšej ČSFR. Okrem iného je certifikovaným systémom s certifikátom kvality ISO 9001:1994/7372(US) aj pre nukleárne technológie a z toho titulu je jeho kvalita kontrolovaná US NRC (US Nuclear Commision), ktorá napr. pred uvedením novej verzie **ANSYS**-u predpisuje cca 3500 testov systémov, realizovaných nezávislými firmami. Veľkou prednosťou tohto systému je, že sa opiera o trvalú spoluprácu s radou popredných univerzít a vedeckých pracovísk v USA, ES a v Japonsku.

V roku 1992 v ankete odborného časopisu "Machin Design dostal ANSYS najväčšie ocenenie v kategórii FE programov. Z tohto dôvodu sa ANSYS stal nosným FEM vzdelávacieho systému NTC (National Technology Corporation) v USA.

O základnej filozofii fy. ANSYS, Inc. hovoria výstižne slová jej prezidenta "We don't sell software, we license technology".

Jednou z veľkých predností tohoto systému je možnosť využívať databanku výsledkov experimentálnych meraní skutočných fyzikálnych vlastností materiálov a to nielen v závislosti od deformácií, ale aj od času, teploty a hladín napätosti.

O vysokej úrovni tohoto systému svedčí aj to, že môže byť inštalovaný na rôznych HW od PC až po CRAY.

Perspektívy rozvoja tohoto systému spočívajú v aktivitách AUC (Ansys User Club), ktorý grupuje jednotlivých užívateľov okolo špičkových vedeckých a univerzitných pracovísk a pravidelne poriada vedecké konferencie v oblasti využitia FEM pri rozvoji nových perspektívnych technológií. Systém je pravidelne každoročne rozširovaný a dopĺňovaný o najnovšie poznatky z oblasti štruktúrnych a potenciálových analýz.

Rozvoj systému zabezpečuje fy. ANSYS, Inc. jednotným informačným systémom prostredníctvom časopisu "ANSYS news", "Infoplaner" pre Európu a "FEM news to Use" pre Česko a Slovensko.

ANSYS umožňuje komplexne riešiť problémy z oblasti pevnostných výpočtov, analýzy teplotných, akustických, magnetických, elektrických a piezoelektrických polí a všeobecných potenciálových problémov. Systém obsahuje viac ako 100 základných konečných prvkov a P-prvkov (vyšších presností) v rovine a v priestore a kontaktné prvky s jednostrannými väzbami a s trením na kontaktnej ploche. Metóda subštruktúr umožňuje riešiť rozsiahle problémy (s viac ako 500 000 neznámymi). Materiálové modely umožňujú zohľadniť anizotropné a ortotropné vlastnosti kompozitných materiálov a železobetónu, hyperelastické vlastnosti materiálov (napr. gumy), pružné a plastické deformácie, trhliny, zmrašťovanie a dotvarovanie v čase a pracovné diagramy so všeobecným priebehom. Systém uvažuje s teóriou malých a veľkých deformácií. Pevnostný výpočet umožňuje statický, stabilitný, dynamický a termodynamický výpočet (modálna, stacionárna a nestacionárna analýza) s posúdením podľa noriem ASME a DIN. Systém umožňuje riešiť 2D-laminárne a 3D-turbulentné prúdenie plynov, kvapalín (riešenie priesakov cez porézne materiály) a tepla. **ANSYS** má zabudovaný systém energetickej kontroly chyby a metódu adaptívnych sietí.

Systém ANSYS je otvorený a prostredníctvom pre- a post- procesoru môže komunikovať s rôznymi užívateľskými programami a CAD systémami. Systém je kompatibilný so systémami NASTRAN, ADAMS, SIMPACK, ProENGINEER, ProFEA, PATRAN, AutoCAD,...

Preprocesor umožňuje modelovať konštrukciu ako teleso všeobecného tvaru (Solid modeling) s využitím Booleovských operácií, všeobecných spline plôch (Non-Uniform Rational B-splines), automatický meshing a adaptívne siete.

Postprocesor umožňuje graficky zobrazit' numerické výsledky a s využitím APDL jazyka spracovať získané numerické výsledky. V prípade výpočtov v čase umožňuje animáciu pretvorenia konštrukcie.

Systém ANSYS patrí medzi komplexné modulárne systémy s interfase IGES pre CAD systémy, MSC/NASTRAN a s väzbou na systémy

- * **LS-DYNA3D** - riešenie dynamickej odozvy s uvažovaním veľkých deformácií (Crash-skúšky, Airbag simulácia, tvárnenie kovov, ...)
- * **FLOTRAN** - komplexné riešenie problémov fluidnej dynamiky, 2D a 3D analýzy prúdenia plynov, kvapalín a tepla
- * **SYSNOISE** - riešenie všeobecnej akustickej analýzy a fluid- štruktúrálnej analýzy

- *C-MOLD** - simulácia procesu plnenia foriemi pri výrobe plastových produktov
- *ADAMS** - riešenie kinematických a dynamických analýz mechanických systémov
- *MAKE-FATIGUE** - posúdenie konštrukčných prvkov na únavu podľa ASME (Boiler Pressure Vessel Code) a DIN
- * ProFEA** - komplexný systém optimálneho návrhu konštrukčných prvkov
- *TK-SOLVER** - postprocesor pre algebraické operácie s možnosťou využitia procedúr pre numerické a štatistické metódy
- *IKAS-** navrhovanie a posudzovanie oceľových konštrukcií podľa EUROCOD 3 a DIN 18800
- *Civil FEM** - navrhovanie a posudzovanie oceľových a železobetónových konštrukcií podľa Eurokódov, ASCE, ASME a národných noriem.

Systém **ANSYS** obsahuje viac ako 100 základných prvkov v knižnici prvkov, okrem iného aj pipe-elementy (na riešenie potrubných systémov) a nasledovné procedúry:

- *štruktúrna a dynamická analýza* - statická, modálna a transienná analýza konštrukcií v kombinácii s nelineárnymi výpočtami a s problémami stability (Nonlinear Buckling)
- *nelineárna analýza* - riešenie materiálovej, geometrickej a štruktúrnej nelinearity a jednostranných kontaktov pomocou Newton - Raphsonovej, Adapt. Descent, Arc- length, Line Search metódy
- *termická analýza* - riešenie stacionárneho a nestacionárneho vedenia, prúdenia a sálania tepla v oblasti lineárnej aj nelineárnej Newton-Raphsonovou metódou v kombinácii s Crank-Nicholson-Euler theta integračnou metódou
- *potenciálna analýza* - riešenie elektrostatických a magnetických polí a piezoelektrických javov, problémov laminárneho a turbulentného prúdenia plynov, kvapalín a tepla, priesakov cez porézne materiály
- *optimalizácia* - riešenie optimálneho tvaru konštrukcie s viazanou podmienkou na napätia, deformácie alebo tvaru

Metóda subštruktúr umožňuje riešiť rozsiahle problémy s viac ako 500 000 stupňami voľnosti. Metóda submodelu sa využíva pri spresnení riešenia zjemnením siete v okolí skúmaného detailu. Obidve tieto techniky umožňujú maximálne zefektívniť výpočet rozsiahlych konštrukcií pri dodržaní požiadaviek na presnosť riešenia.

Program **ANSYS** má zabudovanú techniku adaptívnej siete (adaptive meshing) a odhadu chyby (patch test), resp. automatický systém odhadu chyby diskretizácie oblasti v

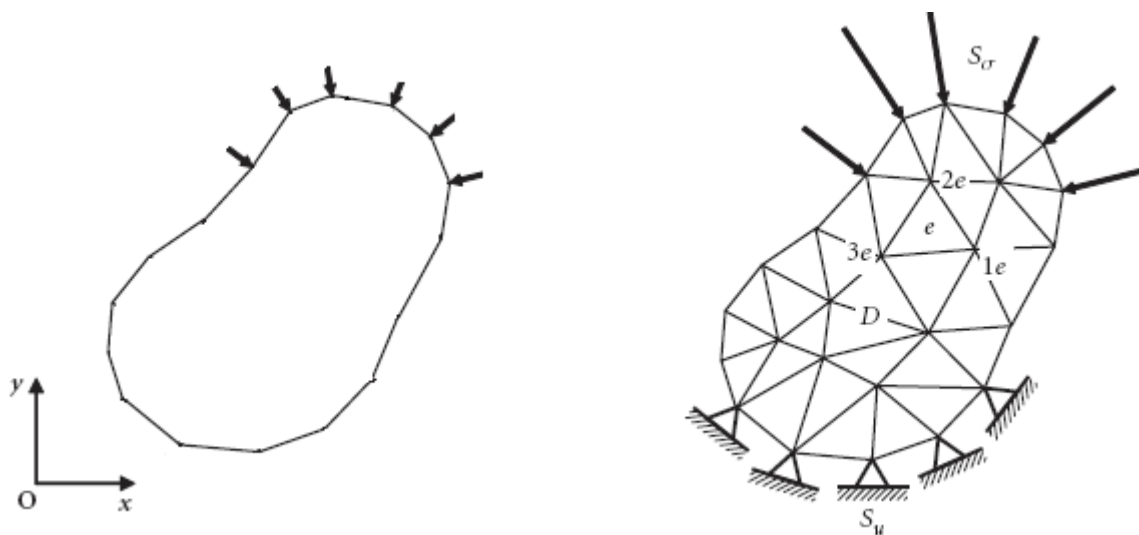
energetickej norme celej štruktúry, ako aj odhad chyby hladín napätí po jednotlivých prvkoch. Táto technika umožňuje nielen indikovať nekorektnosti diskretizácie, problémov singularity a konvergenzie, ale aj automatickú korekciu delenia, t.j. umožňuje optimalizáciu delenia oblasti z hľadiska minimalizácie chyby riešenia. Rovnako dáva možnosti horného a dolného odhadu presnosti analyzovaných fyzikálnych veličín. Táto metodika je zárukou regulárnosti vykonaných analýz.

Aktuálne informácie o systéme ANSYS sú prístupné na internete na adrese <http://ans.vm.stuba.sk> alebo <http://www.ansys.com>.

2. MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNE MODELOVANIE V MKP

Pojem „metóda konečných prvkov“ bol prvý krát použitý v práci R. Couranta [13] z roku 1943. Courant v rámci finitnej analýzy navrhol využívať princíp stacionárnej potenciálnej energie a interpolačné funkcie trojuholníkových podoblastí pomocou polynómov. Riešenie úloh mechaniky aplikáciou minima potenciálnej energie alebo ekvivalentných funkcionálov boli rozpracované v prácach J. W. Rayleigh, [30], W. Ritz [44], a B. G. Galerkin [20], [21]. Ďalší rozvoj MKP bol v tej dobe determinovaný vývojom efektívneho softwaru a hardwaru. V r.1953 S. Levy formuloval tuhostnú analýzu prútových konštrukcií v maticovej forme vhodnej pre obecnú algoritmizáciu pre použitie na počítačoch. [28].

Prvé praktické výpočty elektronickými počítačmi boli vykonané v 50-tych rokoch v USA pre aeronautické výpočty v spoločnosti „Boeing Airplane Company“, M. J. Turner a kolektív (1956) [58] a Argyris (1960) [3]. Pojem **konečný prvok** vo výpočtoch zaviedol R. W. Clough (1960) [11], z dôvodu zdôraznenia rozdielu medzi konečnými a diferenčnými prvkami (diferenciami). V období rokov 1960 – 1980 vznikajú veľké programové balíky, ako sú ANSYS, ADYNA, ABAQUS a iné, pre lineárnu, ako aj nelineárnu analýzu konštrukcií a materiálov. Publikácie Wilsona a Batheho [], ako aj Zienkiewicza (1992), [xx] výrazne obohatili teoretickú základňu MKP a ich aplikáciu na riešenie technických problémov praxe.



Obr.2.1 Diskretizácia telesa na konečné prvky

Metóda konečných prvkov (MKP) patrí medzi najefektívnejšie variačné metódy na riešenie problémov mechaniky kontinua, ako aj plynov a kvapalín a ostatných potenciálových problémov (elektromagnetizmus, akustika, teplo,...). Jej podstatou je rozdelenie konštrukcie, resp. spojitého telesa na sústavu konečných prvkov (obr.2.1) navzájom spojených v uzloch delenia. Takáto diskrétna sústava musí spĺňať podmienky spojitosti a rovnováhy v uzloch

delenia.

Proces výpočtu v MKP je možné rozdeliť do piatich fáz:

1. **Diskretizácia** konštrukcie na konečný počet prvkov (obr.2.1)
2. **Aproximácia** deformačných alebo silových veličín na každom prvku osobitne
3. **Integrácia** konečných prvkov v celok pri zachovaní podmienok spojitosti deformácií
4. **Minimalizácia energie - riešenie** podmienkových rovníc a určenie neznámych uzlových **parametrov**
5. **Determinácia** neznámych po prvkoch - **výpočet vnútorných síl** na jednotlivých prvkoch

Úlohou mechaniky poddajných telies vyplňujúcich objem V a ohraničených povrchom S je určiť tri polia :

- ☛ vektorové pole posunov $\{u\} = \{u, v, w\}^T$
- ☛ tenzorové pole deformácií $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$
- ☛ tenzorové pole napätí $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$

K určeniu pätnástich neznámych funkcií máme k dispozícii systém pätnástich rovníc - (Cauchyho) 3 diferenciálne rovnice rovnováhy, 6 geometrických a 6 fyzikálnych rovníc, ktorých jednoznačné riešenie dostaneme po zohľadnení silových a geometrických okrajových podmienok nasledovne :

$$1. \text{ Diferenciálne rovnice rovnováhy} \quad [\partial]\{\sigma\} - \{b\} = \{0\} \quad na \ V \quad (2.1)$$

$$2. \text{ Geometrické rovnice} \quad [\partial]^T \{u\} - \{\varepsilon\} = \{0\} \quad na \ V \quad (2.2)$$

$$3. \text{ Fyzikálne rovnice} \quad \{\varepsilon_o\} + [C]\{\sigma\} = \{\varepsilon\} \quad na \ V \quad (2.3)$$

$$[D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\}) = \{\sigma\}$$

$$4. \text{ Statické okrajové podmienky} \quad [n]\{\sigma\} - \{p\}_n = \{0\} \quad na \ S_p \quad (2.4)$$

$$[n]\{\sigma\} - \{\sigma\}_n^s = \{0\} \quad na \ S_s + S_u$$

$$5. \text{ Kinematické okrajové podmienky} \quad [n]\{u\} - \{\bar{u}\}_n^s = \{0\} \quad na \ S_u \quad (2.5)$$

$$[n]\{u\} - \{\bar{u}\}_n^p = \{0\} \quad na \ S_s + S_p$$

kde $[C]$ je matice poddajnosti materiálu, $[D]$ je matica tuhosti materiálu ($[D] = [C^{-1}]$), $\{b\} =$

$\{b_x, b_y, b_z\}^T$ je vektor objemových síl, $\{p\} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$ je vektor povrchových síl,

2.1 Priestorový stav napätosti

Pre priestorový stav napätosti definujeme 6 zložkový vektor pomerných deformácií a napätí v tvare $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$ a $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$. Vektor počiatočných deformácií $\{\varepsilon_o\}$ od účinku efektívnej teploty $T_{eff} = T - T_o$ sa rovná $\{\varepsilon_o\} = \alpha_i T_{eff} \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$.

Operátorovu maticu $[\partial]$ vo vzťahoch (2.1) a (2.2) dostaneme z podmienok rovnováhy napätí a objemových síl na diferenciálnom elemente telesa

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

Matica smerových kosínusov $[n]$ vonkajšej normály n_x, n_y, n_z k povrchu S vo vzťahoch (2.4) a (2.5) má obdobné usporiadanie ako matica $[\partial]$

$$[n] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

Vzťah medzi polom napätí a posunov je definovaný Clapeyronovým teorémom

$$\int_V \{\sigma\}^T [\partial]^T \{u\} dV = \int_S \{u\}^T [n] \{\sigma\} dS - \int_V \{u\}^T [\partial] \{\sigma\} dV, \quad (2.8)$$

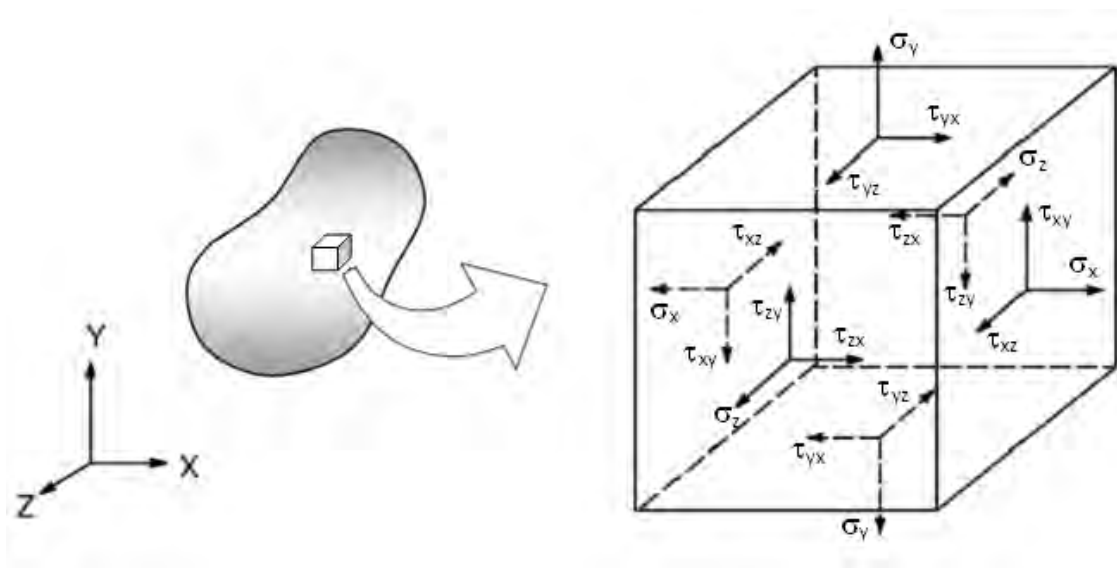
ktorý je bezprostredným dôsledkom Gaussového integrálneho teorému a v podstate porovnáva prácu vnútorných a vonkajších síl.

2.1.1 Stav napätosti a deformácie v bode telesa

Napätosť v bode telesa za obecného stavu je definovaná 6 zložkovým vektorom napätí $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$.

Hlavné napätia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ získame riešením transformačných rovníc za predpokladu, že sa výslednica napätí na obecnej rovine telesa je totožná s normálovou zložkou napätia σ (šmyková zložka τ je nulová), t.j. platí

$$\begin{aligned}
(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= 0 \\
\tau_{yx}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0 \\
\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$



Obr.2.2 Zložky vektora napätia pre priestorový stav napätosti

Podmienkou netriviálneho riešenia Von Karmanových rovníc (2.57) je

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.10}$$

Vyčíslením determinantu v (2.58) dostaneme kubickú rovnicu

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \tag{2.11}$$

kde invarianty I_1, I_2, I_3 sú invarianty tenzora napätosti

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

Zložky hlavných napätí $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ dostaneme teda riešením rovnice (2.59) v tvare

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{J_2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos \theta + 2\pi/3 \end{pmatrix} \quad \forall 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \tag{2.12}$$

kde $\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$, $p = \sqrt{2J_2}$ pre invarianty deviátora napätosti J_2 ($J_2 = (I_1^2 - 3I_2)/3$)

a J_3 ($J_3 = (2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3)/27$).

Intenzita napätí (Saint Venant stress) v bode telesa sa vyjadri ako maximálna hodnota rozdielu zložiek hlavných napätí

$$\sigma_I = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (2.13)$$

Ekvivalentné napätie v bode telesa (Von Mises stress)

$$\sigma_{ef} = \left(\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

Deformácie v bode telesa za obecného stavu sú definované 6 zložkovým vektorom deformácií pomerných deformácií $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$. Zložky vektora hlavných deformácií získame z podmienky lineárnej závislosti transformačných rovníc definujúcich tri zložky pomernej deformácie na obecnej ploche. Riešením kubickej rovnice pre neznáme hodnoty ε

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

získame tri zložky hlavnej pomernej deformácie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ obdobne ako v prípade napätí.

Intenzita pomerných deformácií (Saint Venant strain) v bode telesa sa vyjadri ako maximálna hodnota rozdielu zložiek hlavných pomerných deformácií

$$\varepsilon_I = \text{MAX}(|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, |\varepsilon_2 - \varepsilon_3|, |\varepsilon_3 - \varepsilon_1|) \quad (2.16)$$

Ekvivalentnú pomernú deformáciu (Von Mises strain)

$$\varepsilon_{ef} = \frac{1}{1+\nu'} \left(\frac{1}{2} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.17)$$

kde ν' je efektívne poissonovo číslo.

2.1.2 Lineárne pružný materiál

Maticu tuhosti materiálu $[D]$ v (2.3) dostaneme z matice poddajnosti materiálu $[D] = [C]^{-1}$.

Pre ortotropný materiál máme

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

Matica $[C]$ je definovaná 9 nezávislými konštantami, pretože prvky prvej submatice sú viazané podmienkami symetrie

$$\nu_{xy}E_y = \nu_{yx}E_x, \quad \nu_{yz}E_z = \nu_{zy}E_y, \quad \nu_{zx}E_x = \nu_{xz}E_z,$$

Po inverzii matice poddajnosti $[C]$ dostaneme maticu tuhosti materiálu $[D]$ v tvare

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \xi &= 1 - (\nu_{xy}\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xz}) - \\ &\quad - (\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}) \\ \xi d_{xx} &= E_x (1 - \nu_{zy}\nu_{yz}) \\ \xi d_{xy} &= E_x (\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}) = \\ &= E_y (\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz}) = \xi d_{yx} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ďalšie prvky získame cyklickou zámenou indexov.

V prípade izotropného materiálu platí rozšírený Hookov zákon a

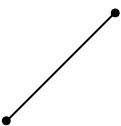
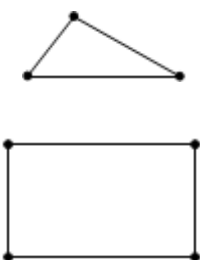
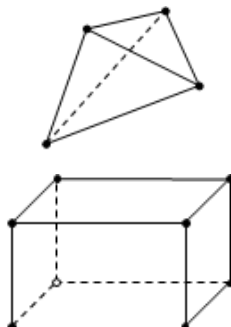
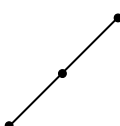
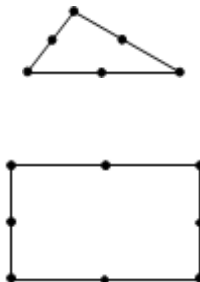
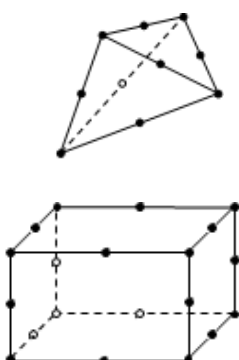
$$E = E_x = E_y = E_z, \quad \nu = \nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{zx}.$$

2.2 Variačná formulácia MKP

Metóda konečných prvkov je založená na variačnom princípe minima potenciálnej energie alebo na vete o virtuálnej práci síl na premiestneniach v uzloch diskretizovaného telesa. Po diskretizácii spojitého telesa na konečné prvky musia tieto spĺňať podmienky spojitosti a rovnováhy v uzloch delenia, t.j. vzťahy (2.1) až (2.6). Celkovú energiu diskretizovanej sústavy dostaneme sumarizáciou energií jednotlivých prvkov. Formulácia základných vzťahov vychádza z vyšetrovania virtuálnej práce síl na základnom prvku (obr.2.3), a to buď jednorozmernom, dvojrozmernom alebo trojrozmernom.

Vychádzajúc zo základných rovníc a z vety o virtuálnej práci dostaneme pre virtuálny vektor premiestnenia $\{\delta u\}$ a jemu zodpovedajúci vektor virtuálnych pomerných deformácií $\{\delta \varepsilon\}$ celkovú **virtuálnu prácu síl** na danej sústave v tvare

$$\delta \pi = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{b\} dV - \int_S \{\delta u\}^T \{p\} dS \quad (2.20)$$

1D prvky	2D prvky	3D prvky	Aproximácia
			Lineárna v xy $ \begin{array}{c} 1 \\ x \quad y \\ \hline x^2 \quad xy \quad y^2 \end{array} $ pascalov trojuholník
			Kvadratická v xy $ \begin{array}{c} 1 \\ x \quad y \\ \hline x^2 \quad xy \quad y^2 \\ x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \\ x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4 \end{array} $ pascalov trojuholník

Obr.2.3 Konečné prvky s diskrétnymi uzlami pre 1D, 2D a 3D úlohy

Priebeh **zložiek vektora premiestnenia** na prvku $\{u\}$ si v deformačnom variante MKP **aproximujeme** polynómom v tvare

$$\{u\} = [\Phi] \{\alpha\} \quad (2.21)$$

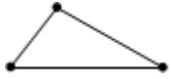
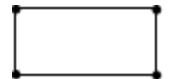
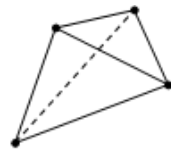
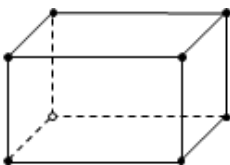
kde $[\Phi]$ je matica polynómu a $\{\alpha\}$ je vektor koeficient polynómu. Podmienkou konverencie približného riešenia je, aby aproximačné funkcie boli na ploche prvku hladké (diferencovateľné), spojité, úplne a symetrické (nezávislé na orientácii súradných osí) ako vidieť v tab.2.1. Spojitosť aproximačných funkcií musí byť zabezpečená aj na spoločnej hranici medzi dvoma prvkami. Úplný polynóm stupňa n (tab.2.1) je definovaný v tvare

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x^{k-1} \quad \text{pre 1D úlohy}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \alpha_k x^i y^j \quad \forall i, j = 0..n, i + j \leq n \quad \text{pre 2D úlohy}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}} \alpha_k x^i y^j z^l \quad \forall i, j, l = 0..n, i + j + l \leq n \quad \text{pre 3D úlohy}$$

Tab.2.1 Prehľad aproximačných funkcií pre základné typy 1D, 2D a 3D prvkov

Rozmer	Prvok	Aproximácia	Polynóm	Uzly
1D		$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$	lineárny	2
1D		$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$	kvadratický	3
1D		$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$	kubický	4
2D		$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$	lineárny	3
2D		$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$	lineárny	4
3D		$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$	lineárny	4
3D		$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 xyz$	lineárny	8

Vektor neznámych uzlových deformačných parametrov $\{r\}$ určíme v uzloch prvku v závislosti na zvolenom polynóme po dosadení konkrétnych súradníc uzlov prvku do matice polynómu v (2.21)

$$\{r\} = [A]\{\alpha\}, \quad (2.22)$$

Vektor koeficientov polynómu získame z (2.10) prenasobením inverznou súradnicovou maticou $[A^{-1}]$ zľava

$$\{\alpha\} = [A^{-1}]\{r\} \quad (2.23)$$

Po dosadení (2.11) do (2.9) získame tvarovú maticu deformačných parametrov $[N]$ v tvare

$$\{u\} = [\Phi]\{\alpha\} = [\Phi][A^{-1}]\{r\} = [N]\{r\} \quad (2.24)$$

Matica $[N]$ je typická tým, že v uzle, kde je definovaný daný parameter má táto funkcia hodnotu 1 a vo všetkých susediacich uzloch prvku má hodnotu 0 (priebeh aproximačnej funkcie medzi týmito dvomi bodmi závisí od stupňa zvoleného polynómu).

Na danom konečnom prvku obecné **vektor premiestnení** $\{u\}$ definujeme v závislosti na vektore počiatkových premiestnení $\{u_o\}$ a premiestnení od daného zaťaženia v tvare

$$\{u\} = \{u_o\} + [N]\{r\}, \quad \{\delta u\} = \{\delta u_o\} + [N]\{\delta r\} \quad (2.25)$$

Potom **vektor pomerných deformácií** $\{\varepsilon\}$ si vyjadríme v tvare

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= [\mathcal{O}]\{u\} - \{\varepsilon_o\} = \{\varepsilon_u\} - \{\varepsilon_o\} + [\mathcal{O}][N]\{r\} = \{\varepsilon_u\} - \{\varepsilon_o\} + [B]\{r\}, \\ \{\delta\varepsilon\} &= \{\delta\varepsilon_u\} - \{\delta\varepsilon_o\} + [B]\{\delta r\}\end{aligned}\quad (2.26)$$

kde $\{\varepsilon_u\}$ je vektor pomerných deformácií od počiatkových premiestnení, $[B]$ tvarová matica pomerných deformácií. Počiatkové deformácie zvyčajne odpovedajú namáhaniu telesa od teploty, dotvarovania alebo zmrašťovania materiálu telesa. V prípade teploty máme $\{\varepsilon_o\} = T_{eff} \{\alpha_{tx}, \alpha_{ty}, \alpha_{tz}, 0, 0, 0\}^T$, kde T_{eff} je efektívna teplota ($T_{eff} = T - T_o$), α_{tx} , α_{ty} , α_{tz} sú súčinitele tepelnej rozťažnosti materiálu (pre x, y, z).

Vektor napätí $\{\sigma\}$ získame z fyzikálnych rovníc

$$\{\sigma\} = \{\sigma_o\} + [D]\{\varepsilon\} = \{\sigma_o\} + [D]([B]\{r\} + \{\varepsilon_u\} - \{\varepsilon_o\}) \quad (2.27)$$

kde $\{\sigma_o\}$ je vektor počiatkových napätí. Počiatkové napätia v telese dostaneme z predchádzajúceho namáhania daného telesa.

Po dosadení vzťahov (2.25) až (2.27) do rovníc (2.20) a úprave dostaneme celkovú **virtuálnu prácu síl** v tvare

$$\begin{aligned}\delta\pi &= \{\delta r\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \{r\} + \int_V [B]^T \{\sigma_o\} dV + \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_u\} dV - \right. \\ &\quad \left. - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} dV - \int_V [N]^T \{b\} dV - \int_S [\tilde{N}]^T \{p\} dS \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Vychádzajúc z vety o virtuálnej práci výraz vo vzťahu (2.28) pre rovnovážny silový systém pôsobiaci na teleso o objeme V a povrchu S sa musí rovnať nule, t.j. platí $\delta\pi = 0$. Výraz vpravo vo vzťahu (2.28) predstavuje skalárny súčin dvoch vektorov. Za predpokladu, že vektor $\{\delta r\} \neq \{0\}$, virtuálna práca síl na sústave bude nulová, ak výraz v zátvorke bude rovný nulovému vektoru

$$\begin{aligned}\int_V [B]^T [D] [B] dV \{r\} + \int_V [B]^T \{\sigma_o\} dV + \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_u\} dV - \\ - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} dV - \int_V [N]^T \{b\} dV - \int_S [\tilde{N}]^T \{p\} dS = \{0\}\end{aligned} \quad (2.29)$$

kde matica $[\tilde{N}]$ je modifikáciou tvarovej matice premiestnení $[N]$ platnej pre povrch S .

Vzťah (2.29) predstavuje systém algebrických rovníc, ktoré predstavujú **podmienky rovnováhy** zovšeobecnených uzlových síl na danom prvku

$$[K]\{r\} = \{F\} = \{F_o\} + \{F_\sigma\} + \{F_u\} + \{F_\varepsilon\} + \{F_b\} + \{F_p\} \quad (2.30)$$

kde $[K]$ je matica tuhosti prvku, $\{r\}$ je vektor uzlových deformačných parametrov prvku, $\{F\}$ je vektor zovšeobecnených síl od zaťaženia, pričom $\{F_o\}$ je vektor singulárnych síl pôsobiacich v uzloch delenia a platí

$$\begin{aligned} [K] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV & \{F_\sigma\} &= - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV & \{F_u\} &= - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_u\} dV \\ \{F_\varepsilon\} &= \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV & \{F_b\} &= \int_V [N]^T \{b\} dV & \{F_p\} &= \int_S [\tilde{N}]^T \{p\} dS \end{aligned} \quad (2.31)$$

Vzťahy (2.31) formulované v lokálnom súradnom systéme xyz daného prvku je potrebné transformovať do globálneho súradného systému XYZ (obr.2.2) spoločného pre všetky prvky danej sústavy pomocou transformačných matic $[T]$. Definujme vektory $\{r\}_{glob}$ a $\{F\}_{glob}$ v globálnom súradnom systéme XYZ , potom platí

$$\{r\} = [T] \{r\}_{glob} \quad \text{a} \quad \{F\} = [T] \{F\}_{glob} \quad (2.32)$$

Dosadením vzťahov (2.32) do (2.30) dostaneme

$$[K] [T] \{r\}_{glob} = [T] \{F\}_{glob} \quad (2.33)$$

a po prenasobení rovníc zľava maticou $[T]^T$ máme

$$[T]^T [K] [T] \{r\}_{glob} = [K]_{glob} \{r\}_{glob} = \{F\}_{glob}, \quad (2.34)$$

kde $[T]^T [T] = [1]$ pre ortogonálny súradný systém.

Na celej konštrukcii, resp. telese je definovaný celkový vektor deformačných parametrov $\{r_{tot}\}$ obsahujúci neznáme parametre v uzlov delenia. Vychádzajúc z podmienky spojitosti prvkov v uzloch delenia definujeme vzťah medzi vektorom $\{r^e\}_{glob}$ a $\{F^e\}_{glob}$ na prvku „e“ a celkovým vektorom $\{r_{tot}\}$ a $\{F_{tot}\}$ nasledovne

$$\{r^e\}_{glob} = [L^e] \{r_{tot}\} \quad \text{a} \quad \{F^e\}_{glob} = [L^e] \{F_{tot}\} \quad (2.35)$$

kde lokalizačná matica $[L^e]$ obsahuje jednotky a nuly podľa nasledovných podmienok

$$r_m^e = L_{mi}^e r_i^{tot}, \quad \text{pre} \quad L_{mi}^e = \begin{cases} 1 & \forall r_m^e \equiv r_i^{tot} \\ 0 & \forall r_m^e \neq r_i^{tot} \end{cases} \quad (2.36)$$

Ak konštrukcia, resp. teleso pozostáva z n -elementov, tak celková virtuálna práca síl sa rovná algebrickému súčtu virtuálnych prác síl na jednotlivých prvkoch

$$\delta\pi = \sum_{e=1}^n \delta\pi^e = \{\delta r_{tot}\}^T \left(\sum_{e=1}^n [L^e]^T [K^e]_{glob} [L^e] \{r_{tot}\} - \sum_{e=1}^n [L^e] \{F^e\}_{tot} \right) = 0 \quad (2.37)$$

Odkiaľ dostaneme celkové podmienkové rovnice rovnováhy síl na danej konštrukcii

$$[K_{tot}]\{r_{tot}\} = \{F_{tot}\} \quad (2.38)$$

kde prvky celkovej matice tuhosti konštrukcie dostaneme z matíc tuhosti jednotlivých prvkov

$$K_{ij}^{tot} = \sum_{e=1}^n K_{km}^e L_{ki}^e L_{mj}^e, \quad \text{pre} \quad L_{ki}^e = \begin{cases} 1 & \forall r_k^e \equiv r_i^{tot} \\ 0 & \forall r_k^e \neq r_i^{tot} \end{cases} \quad \text{a} \quad L_{mj}^e = \begin{cases} 1 & \forall r_m^e \equiv r_j^{tot} \\ 0 & \forall r_m^e \neq r_j^{tot} \end{cases} \quad (2.39)$$

a prvky celkového vektora zovšeobecnených síl v tvare

$$F_i^{tot} = \sum_{e=1}^n F_k^e L_{ki}^e \quad (2.40)$$

2.3 Jednorozmerné úlohy

2.3.1 Prúťové sústavy

Prúťové sústavy sú konštrukcie pozostávajúce z priamych prúťov navzájom pospájaných kĺbovými väzbami. Základný prvok konštrukcie je namáhaný na ťah-tlak alebo na vzper. Pre prípad namáhania ťah-tlak definujeme nasledovné polia ako jednoprvkové vektory

$$\{u\} = u, \quad \{\varepsilon\} = \varepsilon_x, \quad \{\sigma\} = \sigma_x \quad (2.41)$$

Vychádzajúc z geometrických rovníc pre prípad ťah-tlak máme

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} \quad (2.42)$$

a teda operátorovu maticu $[\partial]$ vo vzťahoch (2.1) a (2.2) dostaneme v tvare

$$\{\varepsilon\} = [\partial]^T \{u\}, \quad [\partial] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \quad (2.43)$$

Maticu tuhosti materiálu $[D]$ dostaneme z jednoduchého Hookovho zákona ako jednoprvkovú v tvare

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad \text{pričom} \quad [D] = E \quad (2.44)$$

Priebeh posunov po dĺžke prvku uvažujeme ako lineárny. Vektor posunov si aproximujeme na prvku polynómom prvého stupňa

$$\{u\} = u = \alpha_1 + \alpha_2 x = [\Phi]\{\alpha\} \quad (2.45)$$

kde $[\Phi] = [1 \ x]$ je matica polynómu a $\{\alpha\}^T = \{\alpha_1 \ \alpha_2\}$ je vektor parametrov polynómu.

Neznáme parametre polynómu určíme z vektoru deformačných parametrov definovaných v uzloch prvku $\{r\} = \{u_i, u_j\}^T$

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = [A]\{\alpha\} \quad (2.46)$$

Vektor koeficientov polynómu získame z (2.46) prenasobením inverznou súradnicovou maticou $[A^{-1}]$

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [A^{-1}]\{r\} \quad (2.47)$$

kde $l = x_j - x_i$ je dĺžka prúta.

Po dosadení (2.47) do (2.45) získame závislosť vektora premiestnenia prvku od vektora deformačných parametrov v uzloch prvku

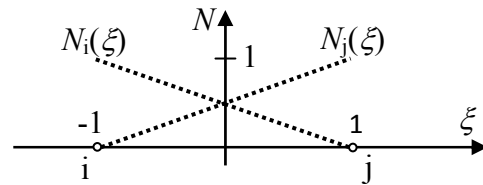
$$\{u\} = [\Phi]\{\alpha\} = [\Phi][A^{-1}]\{r\} = [N]\{r\}, \quad (2.48)$$

kde $[N] = [N_i, N_j]$ je tvarová matica deformačných parametrov prvku, kde $N_i = \frac{l-x}{l}$ a

$N_j = \frac{x}{l}$ pre $0 \leq x \leq l$. Definujme si celkový vektor premiestnenia $\{u\}$ aj v závislosti na počiatočných premiestneniach $\{u_o\}$ a na vektore deformačných parametrov $\{r\}$ v tvare

$$\{u\} = \{u_o\} + [N]\{r\}, \quad [N] = [N_i, N_j], \quad N_i = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_j = \frac{1+\xi}{2} \quad (2.49)$$

kde vektor deformačných parametrov $\{r\} = \{u_i, u_j\}^T$ a tvarové funkcie N_i a N_j sú vyjadrené v závislosti na parametrickej súradnici $\xi = 2x/l - 1$, pričom platí $0 \leq x \leq l$, resp. $-1 \leq \xi \leq 1$.



Obr.2.4 Tvarové funkcie na prúťovom prvku

Vektor pomerných deformácií $\{\varepsilon\}$ dostaneme dosadením (2.49) do (2.43)

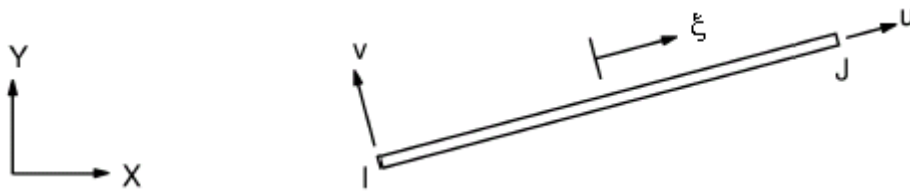
$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_o\} + [\partial]\{u\} = \{\varepsilon_u\} - \{\varepsilon_o\} + [\partial][N]\{r\} = \{\varepsilon_u\} - \{\varepsilon_o\} + [B]\{r\} \quad (2.50)$$

kde $[B] = [-1/l; 1/l]^T$.

Vektor napätí $\{\sigma\}$ získame z fyzikálnych rovníc (2.44) a (2.50)

$$\{\sigma\} = \{\sigma_o\} + [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\}) = \{\sigma_o\} + [D]([B]\{r\} + \{\varepsilon_u\} - \{\varepsilon_o\}) \quad (2.51)$$

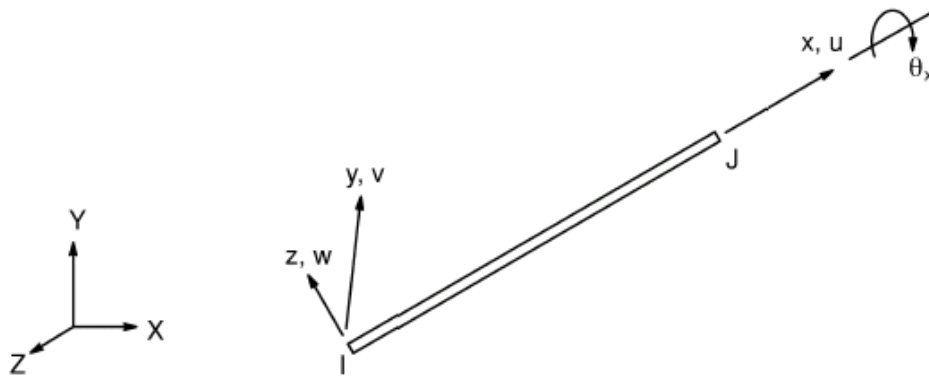
kde maticu $[D]$ uvažujeme podľa (2.44) a maticu $[B]$ podľa (2.50).



Obr.2.5 Prútový prvok v rovinnom súradnicovom systéme XY

Maticu tuhosti prvku a vektor zovšeobecnených síl na prvku dostaneme zo vzťahov (2.19) po dosadení tvarových matic premiestnenia a deformácií na prvku.

$$[K] = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$



Obr.2.6 Prútový prvok v priestorovom súradnom systéme XYZ

Vektor deformačných parametrov a zovšeobecnených síl v globálnom súradnom systéme XY v prípade rovinnej prútovej konštrukcie dostaneme v tvare

$$\{r\} = [T]\{r\}_{glob}, \quad \{F\} = [T]\{F\}_{glob}, \quad \text{resp.} \quad \{r\}_{glob} = [T]^T \cdot \{r\}, \quad \{F\}_{glob} = [T]^T \cdot \{F\} \quad (2.53)$$

$$\text{kde } [T] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \cos(\alpha) = \frac{x_j - x_i}{l}, \quad \sin(\alpha) = \frac{y_j - y_i}{l} \quad (2.54)$$

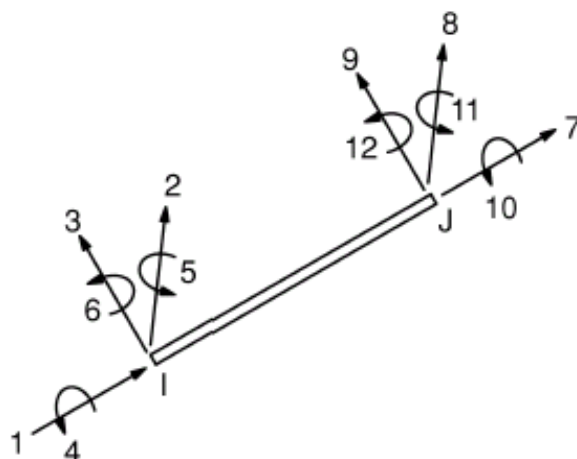
V prípade priestorovej prútovej sústavy sú v každom uzle definované tri zložky premiestnenia u, v, w . Vektor deformačných parametrov na priestorovom prvku má 6 parametrov v globálnom súradnom systéme $\{r\}_{glob}^T = \{U_i, V_i, W_i, U_j, V_j, W_j\}$. Transformačná matica pre priestorový prvok je definovaná v tvare

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x_j - x_i}{l}, \quad \cos(\beta) = \frac{y_j - y_i}{l}, \quad \cos(\gamma) = \frac{z_j - z_i}{l}$$

2.3.2 Rovinné rámové systavy

Rámové systavy sú konštrukcie pozostávajúce z priamych prútov navzájom pospájaných tuhými, pružnými alebo kĺbovými väzbami. Základný prvok konštrukcie je namáhaný na ťah-tlak, ohyb a šmyk. Sú definované dve základné teórie ohybu prúta - Euler-Bernoulli a Timoshenkova. Euler-Bernoulliho hypotézy vychádzajú z predpokladu zachovania uhla normály po deformácii nosníka. Timoshenkova teória vychádza z predpokladu vzniku šmykových deformácií a teda normála na os prúta si nezachová svoj normálny smer, ale sa pootočí.



Obr.2.7

Pre prípad namáhania nosníka na ťah-tlak, ohyb a šmyk vyjadríme si vektorové polia premiestnení, deformácií a napätí v nasledovnom tvare

$$\{u\} = \{u, v, \theta_z\}^T, \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \gamma_{xy}\}^T, \quad \{\sigma\} = \{\sigma_x, \tau_{xy}\}^T \quad (2.56)$$

Na základe Euler-Bernoulliho hypotézy o zachovaní rovinnosti prierezu a zachovaní orientácie normály po deformácii máme

$$u(x, y) = u_s(x) - y \cdot \theta_z(x), \quad v(x, y) = v_s(x), \quad (2.57)$$

kde $u_s(x)$, $v_s(x)$ sú posuny bodu na osi nosníka a $\theta_z(x)$ je pootočenie daného prierezu nosníka okolo osi z, pričom

$$\theta_z(x) = \frac{dv_s(x)}{dx}, \quad (2.58)$$

V prípade uvažovania vplyvu šmykových deformácií na základe Timoshenkovej hypotézy o pootočení pseudonormály o uhol $\bar{\gamma}_y(x)$ si vyjadríme celkové pootočenie pseudonormály z geometrickej rovnice pre určenie pomernej šmykovej deformácie v tvare

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \quad (2.59)$$

Po dosadení vzťahov (2.57) do (2.59) máme

$$\theta_z(x) = \frac{dv_s(x)}{dx} - \bar{\gamma}_y(x), \quad (2.60)$$

kde uhol pootočenia od šmykovej deformácie $\bar{\gamma}_y(x) \equiv \gamma_{xy}(x, y)$ sa uvažuje ako konštantná po výške prierezu.

Pomernú deformáciu $\varepsilon_x(x, y)$ si vyjadríme z prvého výrazu v (2.57)

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du_s(x)}{dx} - y \cdot \frac{d\theta_z(x)}{dx}, \quad (2.61)$$

Vzťah medzi polom premiestnení a pomerných deformácií potom dostaneme z (2.2) v tvare

$$\{\varepsilon\} = [\partial]^T \cdot \{u\}, \quad [\partial]^T = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & -y \cdot d/dx \\ 0 & d/dx & -1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Vektor pomerných deformácií a napätí na nosníku definujeme v tvare

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \gamma_{xy}\}^T, \quad \{\sigma\} = \{\sigma_x, \tau_{xy}\}^T \quad (2.63)$$

Fyzikálne rovnice máme v tvare

$$\{\sigma\} = [D] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_o\}), \quad [D] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

kde matica tuhosti materiálu je diagonálna. Vektor počiatkových pomerných deformácií od vplyvu teploty $T(x, y)$ s uvažovaním referenčnej teploty T_o a súčiniteľa tepelnej rozťažnosti α_t vyjadríme nasledovne

$$\{\varepsilon_o\} = \{\alpha_t (T - T_o), 0\}^T, \quad (2.65)$$

Zložky vektora vnútorných síl $N(x)$, $M(x)$ a $V(x)$ v priereze nosníka dostaneme ako integrálne výslednice napätí na danom priereze

$$N(x) = \int_S \sigma_x(x) \cdot dS, \quad M_z(x) = \int_S y \cdot \sigma_x(x) \cdot dS, \quad V_y(x) = \int_S \tau_{xy}(x) \cdot dS \quad (2.66)$$

Po dosadení vzťahov (2.62) až (2.65) do (2.66) máme

$$N(x) = ES \cdot \frac{du_s}{dx} - N_t, \quad M_z(x) = EI \cdot \frac{d\theta_z}{dx} - M_t, \quad V(x) = \kappa GS \left(\frac{dv_s}{dx} - \theta_z \right), \quad (2.67)$$

kde h je výška prierezu, S je prierezová plocha, I_z je kvadratický moment zotrvačnosti a κ je súčiniteľ efektívnej šmykovej plochy závislý na tvare prierezu (viď dodatok A) a vyjadrujúci ekvivalenciu medzi deformačnou prácou skutočných šmykových napätí na šmykových pomerných deformáciách a tu zavedenom zjednodušení s konštantným priebehom šmykových napätí a deformácií po výške prierezu. Osovú silu N_t a ohybový moment M_t od vplyvu teploty

dostaneme v tvare

$$N_t = ES\alpha_t \left(\frac{T_d + T_h}{2} - T_o \right), \quad M_t = EI_z \alpha_t \cdot \frac{T_d - T_h}{h}, \quad (2.68)$$

kde priebeh teploty po výške prierezu uvažujeme lineárny s hodnotami T_d na dolnom okraji, T_h na hornom okraji prierezu. Počiatočnú teplotu (resp. referenčnú) uvažujeme o hodnote T_o .

Vektor deformačných parametrov $\{r\}$ a vektor zovšeobecnených síl $\{F\}$ na prvku v lokálnom súradnicovom systéme definujeme v tvare

$$\{r\} = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\}^T, \quad (2.69)$$

$$\{F\} = \{F_{xi}, F_{yi}, M_{zi}, F_{xj}, F_{yj}, M_{zj}\}^T$$

Potom priebeh posunov $u(x)$, $v(x)$ a pootočenía $\theta_z(x)$ po dĺžke prvku aproximujeme pre $x = (1 + \xi)l/2$ v tvare

$$u = \frac{1}{2} (u_i(1 - \xi) + u_j(1 + \xi)), \quad \theta_z = \frac{1}{2} (\theta_{zi}(1 - \xi) + \theta_{zj}(1 + \xi)) \quad (2.70)$$

$$v = \frac{1}{2} \left(v_i \left(1 - \frac{\xi}{2} (3 - \xi^2) \right) + v_j \left(1 + \frac{\xi}{2} (3 - \xi^2) \right) + \frac{L}{8} (\theta_{zi}(1 - \xi^2)(1 - \xi) - \theta_{zj}(1 - \xi^2)(1 + \xi)) \right)$$

Maticu tvarových funkcií $[N]$ vyjadríme na základe vzťahov (2.69) a (2.70) v nasledovnom tvare

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & 0 & 0 & \frac{1+\xi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\xi}{4}(3-\xi^2) & \frac{l}{8}(1-\xi^2)(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2} + \frac{\xi}{4}(3-\xi^2) & \frac{-l}{8}(1-\xi^2)(1+\xi) \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi}{2} & 0 & 0 & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Virtuálnu prácu vnútorných síl na pretvoreniach vyjadríme v tvare

$$\delta A = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{-1}^1 \{\delta q\}^T \{Q\} (l/2) d\xi, \quad (2.72)$$

kde vektor pretvorenia je $\{q\} = \{u_{,x}, \theta_{,x}, v_{,x} - \theta\}^T$ a vektor vnútorných síl $\{Q\} = \{N_x, M_z, V_y\}^T$, pre ktorý podľa (2.67) platí

$$\{Q\} = [\tilde{D}] \{q\}, \quad \text{kde} \quad [\tilde{D}] = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 \\ 0 & 0 & \kappa GS \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Vektor pretvorení $\{q\}^T$ vyjadríme z geometrických rovníc (2.50)

$$\{q\} = [\tilde{\partial}]^T \{u\} = [\tilde{\partial}]^T [N] \{r\} = [\tilde{B}] \{r\}, \quad (2.74)$$

kde operátorova matica $[\tilde{\partial}]$ má tvar

$$\{\tilde{\partial}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \{\tilde{\partial}\} = \frac{2}{l} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} & -1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Tvarovú maticu pomerných deformácií $[\tilde{B}]$ získame zo vzťahov (2.74) a (2.75)

$$[\tilde{B}] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{-1}{l} \\ 0 & -\frac{3}{2l}(1-\xi^2) & \frac{3\xi^2-2\xi-1}{8} & 0 & \frac{3}{2l}(1-\xi^2) & \frac{-(3\xi^2-2\xi-1)}{8} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Po dosadení vzťahov (2.73) a (2.74) do (2.72) vyjadríme virtuálnu prácu vnútorných síl v tvare

$$\delta A = \int_{-1}^1 \{\delta q\}^T \{Q\} (l/2) d\xi = \{\delta r\}^T \left(\int_{-1}^1 [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] (l/2) d\xi \right) \{r\} = \{\delta r\}^T [K] \{r\} \quad (2.77)$$

kde pre maticu tuhosti prvku $[K]$ platí

$$[K] = \frac{2EI_z}{l(1+2\chi)} \begin{bmatrix} \frac{S(1+2\chi)}{2I_z} & 0 & 0 & -\frac{S(1+2\chi)}{2I_z} & 0 & 0 \\ & \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} & 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} \\ & & (2+\chi) & 0 & \frac{3}{l} & (1-\chi) \\ & & & \frac{S(1+2\chi)}{2I_z} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \\ & & & & & (2+\chi) \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

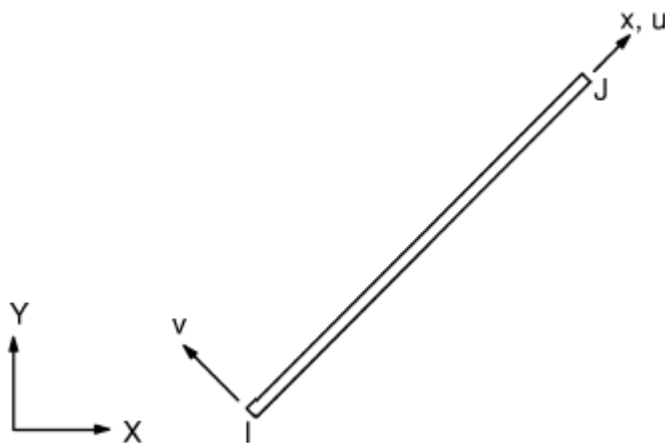
sym.

Pomerný parameter χ vyjadríme v tvare $\chi = 6EI_z / \kappa GSI^2$. Ak uvažíme dokonalú šmykovú tuhosť prierezu ($GS \div \infty$), tak $\chi \div 0$. Potom pre $\chi = 0$ matica tuhosti prúta (2.78) odpovedá Euler-Bernoulliho hypotéze.

Vektor deformačných parametrov a zovšeobecnených síl v globálnom súradnom systéme v prípade rámovej konštrukcie v rovine XY máme v tvare

$$\{r\} = [T]\{r\}_{glob}, \quad \{F\} = [T]\{F\}_{glob}, \quad \text{resp.} \quad \{r\}_{glob} = [T]^T \cdot \{r\}, \quad \{F\}_{glob} = [T]^T \cdot \{F\}$$

$$\text{kde} \quad [T] = \begin{bmatrix} [T_i] & [0] \\ [0] & [T_j] \end{bmatrix}, \quad [T_i] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 \\ -\sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$



Obr.2.8 Nosníkový prvok v rovinnom súradnom systéme XY

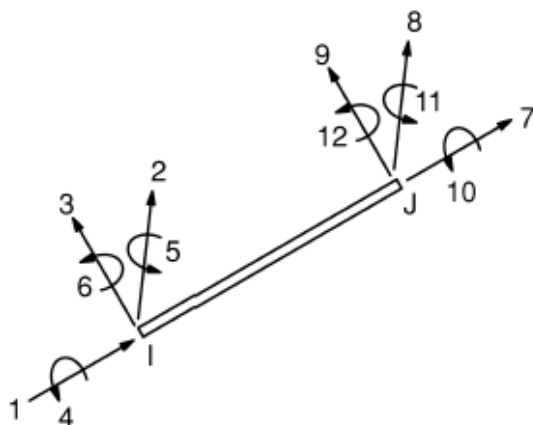
Globálny súradnicový systém môžeme uvažovať ako uzlový súradnicový systém, ktorý v každom uzle môže byť definovaný s rozdielnou orientáciou ($\alpha_i \neq \alpha_j$) alebo ako jediný pre celú konštrukciu ($\alpha = \alpha_i = \alpha_j$). Potom orientáciu prúta vyjadríme pomocou súradníc uzlov prúta

$$\cos(\alpha) = \frac{X_j - X_i}{l}, \quad \sin(\alpha) = \frac{Y_j - Y_i}{l} \quad (2.80)$$

kde X_i, Y_i (resp. X_j, Y_j) sú súradnice i (resp. j) uzla prvku, l je dĺžka prúta.

2.3.3 Priestorové rámove sústavy

Priestorový prvok rámovej sústavy definujeme ako rozšírenie rovinného nosníkového prvku o namáhanie ohybom v rovine ZX a krútením okolo osi prúta X .



Obr.2.9

Vektorové polia premiestnení, deformácií a napätí si vyjadríme v tvare

$$\{u\} = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T, \quad \{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T, \quad \{\sigma\} = \{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (2.81)$$

Na základe hypotézy o zachovaní rovinnosti prierezu a pootočení pseudonormály máme

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y \cdot \theta_z(x) + z \cdot \theta_y(x), \quad (2.82)$$

kde $u_s(x)$ sú posuny bodu na osi nosníka a $\theta_y(x)$, $\theta_z(x)$ je pootočenie daného prierezu nosníka okolo osi Y a Z , pričom pootočenie prierezu môžeme uvažovať podľa Euler-Bernoulli (normála zachová orientáciu po deformácii) alebo podľa Timoshenkovej hypotézy (celkové pootočenie pseudonormály pozostáva z pootočenia normály a aj skosu uhla v dôsledku šmykovej deformácie) obdobne ako v predchádzajúcej kapitole.

Vektor deformačných parametrov $\{r\}$ a vektor zovšeobecnených síl $\{F\}$ na prvku v lokálnom súradnicovom systéme definujeme v tvare

$$\{r\} = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, u_j, v_j, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}\}^T, \quad (2.83)$$

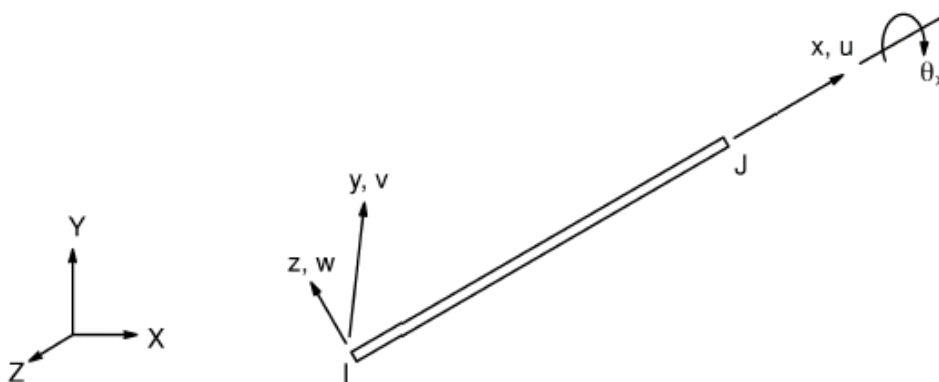
$$\{F\} = \{F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, F_{xj}, F_{yj}, F_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}\}^T$$

Vektor deformačných parametrov a zovšeobecnených síl v globálnom súradnicovom systéme v prípade rámovej konštrukcie v priestore XYZ dostaneme v tvare

$$\{r\} = [T] \{r\}_{glob}, \quad \{F\} = [T] \{F\}_{glob}, \quad \text{resp.} \quad \{r\}_{glob} = [T]^T \{r\}, \quad \{F\}_{glob} = [T]^T \{F\}$$

$$\text{kde } [T] = \begin{bmatrix} [T_i] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [T_i] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_j] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [T_j] \end{bmatrix}, \quad [T_i] = \begin{bmatrix} \cos(xX) & \cos(xY) & \cos(xZ) \\ \cos(yX) & \cos(yY) & \cos(yZ) \\ \cos(zX) & \cos(zY) & \cos(zZ) \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

kde x, y, z sú súradnice lokálneho súradnicového systému a X, Y, Z sú súradnice globálneho, resp. uzlového súradnicového systému.



Obr.2.10 Nosníkový prvok v priestorovom súradnom systéme XYZ

V prípade uváženia jednotného globálneho súradnicového systému pre celý prvok máme

$$[T_i] \equiv [T_j]$$

$$[T_i] = [T_j] = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & S_1 C_2 & S_2 \\ (-C_1 S_2 S_3 - S_1 C_3) & (-S_1 S_2 S_3 + C_1 C_3) & S_3 C_2 \\ (-C_1 S_2 C_3 + S_1 S_3) & (-S_1 S_2 C_3 - C_1 S_3) & C_3 C_2 \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

$$\text{kde } S_1 = \begin{cases} \frac{Y_j - Y_i}{L_{xy}} & \text{ak } L_{xy} > d \\ 0.0 & \text{ak } L_{xy} < d \end{cases} \quad C_1 = \begin{cases} \frac{X_j - X_i}{L_{xy}} & \text{ak } L_{xy} > d \\ 1.0 & \text{ak } L_{xy} < d \end{cases}$$

$$S_2 = \frac{Z_j - Z_i}{L}, \quad C_2 = \frac{L_{xy}}{L},$$

$$S_3 = \sin(\theta), \quad C_3 = \cos(\theta)$$

L_{xy} je priemet prúta do roviny XY, $d = 0.0001L$, θ je uhol pootočenia.

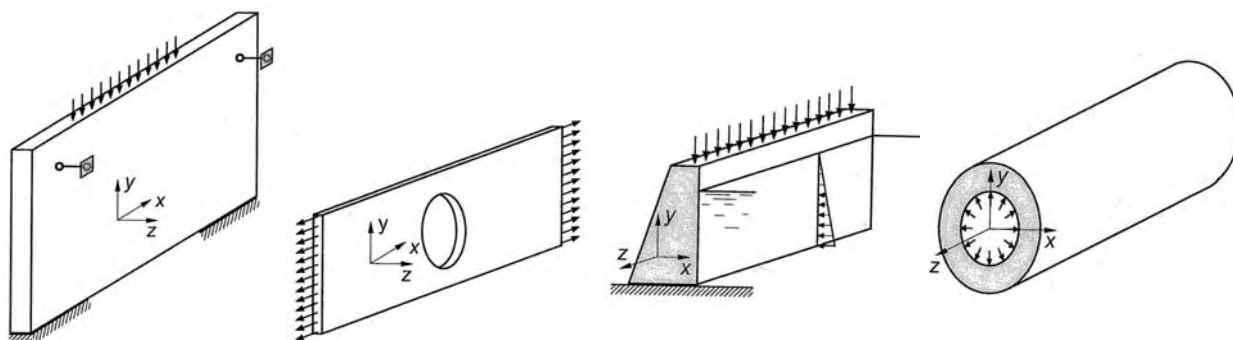
2.4 Dvojrozmerné úlohy

2.4.1 Rovinný stav napätosti a deformácie

V dvojrozmerných úlohách sa vyskytujú dva špeciálne prípady stavu napätosti a deformácie – rovinný stav deformácie ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) a rovinný stav napätosti ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$).

V oboch prípadoch do virtuálnej práce pola napätí na poli deformácií a teda do tuhosti sústavy vstupujú len tri zložky napätia a deformácie (ďalšie členy majú nulovú prácu). Pre rovinný stav napätosti a deformácie sú definované vektory napätia a deformácie v tvare

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \quad \text{a} \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$



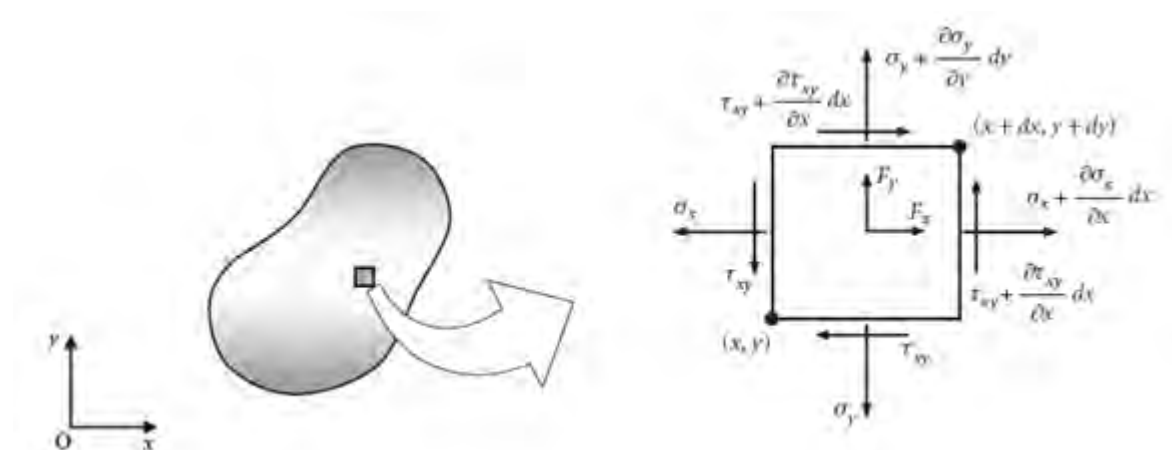
a) Rovinný stav napätosti

b) Rovinný stav deformácie

Obr.2.11 Základné typy rovinných úloh

Pre dvojrozmerné úlohy dostaneme operátorovu maticu $[\partial]$ vo vzťahoch (2.1) a (2.2) z podmienok rovnováhy napätí a objemových síl na diferenciálnom elemente rovinného telesa

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$



Obr.2.12 Rovinný stav napätosti v spojitom elastickom telese

Matica smerových kosínusov $[n]$ vonkajšej normály n_x, n_y k povrchu S vo vzťahoch (2.4) a (2.5) má obdobné usporiadanie ako matica $[\partial]$

$$[n] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

Extrémne hodnoty normálových napätí získame z riešenia podmienky obdobne ako v ()

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.88)$$

Riešením rovnice (2.88) dostaneme zložky hlavných napätí $\sigma_1 \geq \sigma_2$ v tvare

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.89)$$

Intenzita napätí (Saint Venant stress) v bode telesa sa vyjadri ako maximálna hodnota rozdielu zložiek hlavných napätí

$$\sigma_I = MAX(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2|, |\sigma_1|) \quad (2.13)$$

Ekvivalentné napätie v bode telesa (Von Mises stress)

$$\sigma_{ef} = \left(\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

Pre **rovinný stav deformácie** vychádzame z redukovanej matice tuhosti pre priestorový stav napätosti (2.3)

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Inverziou matice tuhosti materiálu si odvodíme prvky matice poddajnosti materiálu

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} c_{xx} &= (1 - \nu_{xz}\nu_{zx})/E_x \\ c_{xy} &= -(\nu_{xy} - \nu_{xz}\nu_{zy})/E_x = -(\nu_{yx} - \nu_{zx}\nu_{yz})/E_y \\ c_{yy} &= (1 - \nu_{yz}\nu_{zy})/E_y \end{aligned} \quad (2.89)$$

Pre **rovinný stav napätosti** vychádzame z redukovanej matice poddajnosti pre priestorový stav napätosti (2.3)

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & 0 \\ -\nu_{yx}/E_x & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Inverziou matice poddajnosti materiálu si odvodíme prvky matice tuhosti materiálu

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} d_{xx} &= E_x / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \\ d_{xy} &= d_{yx} = \nu_{xy} E_x / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) = \nu_{yx} E_y / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \\ d_{yy} &= E_y / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \end{aligned} \quad (2.91)$$

Materiálová ortotropia je charakteristická napr. pre ortotropne vystužený betón, ktorého charakteristiky je možné overiť experimentálne. V prípade izotropného materiálu matice tuhosti a poddajnosti materiálu pre rovinné úlohy dostaneme v zjednodušenom tvare.

Tab.2.2

Rovinná		
	napätosť	deformácia
[C]	$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$
[D]	$\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$	$\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$

Vplyv pôsobenia efektívnej teploty $T_{eff} = T - T_o$ na izotropnom prvku sa zohľadní vo vektore napätí pre **rovinný stav napätosti** v tvare

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{E} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \alpha_t \bar{E} T_{eff} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{E} = E/(1-\nu^2) \quad (2.92)$$

a pre **rovinný stav deformácie**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \alpha_t \bar{E} T_{eff} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \bar{E} = E/((1-2\nu)(1+\nu)) \quad (2.93)$$

2.4.2 Osovosymetrický stav napätosti

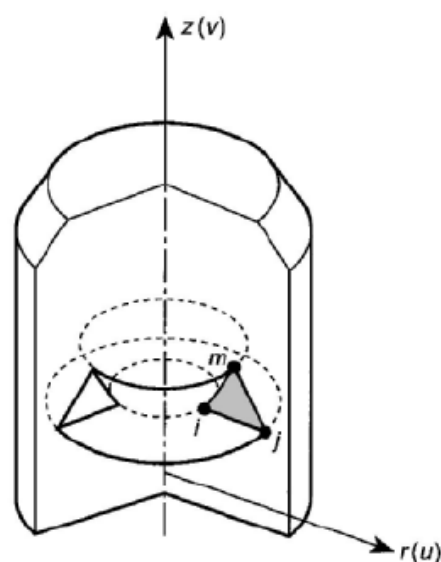
V prípade osovosymetrického stavu napätosti je výhodné zložky deformácie a napätosti transformovať do cylindrického súradného systému. V bode telesa definujeme 4 zložkový vektor pomerných deformácií $\{\varepsilon\}$ a napätí $\{\sigma\}$ v tvare

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}\}^T$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}\}^T$$

Vektor počiatkových deformácií od efektívnej teploty $T_{eff} = T - T_o$ vyjadríme v tvare

$$\{\varepsilon_o\} = \alpha_t T_{eff} \{1, 1, 1, 0\}^T.$$



Obr.2.13 Osovosymetrický stav napätosti

Maticu tuhosti materiálu $[D]$ v (2.3) dostaneme z matice poddajnosti materiálu $[D] = [C]^{-1}$.

Pre izotropný materiál máme

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/E_r & -\nu_{rt}/E_r & -\nu_{rz}/E_r & 0 \\ -\nu_{tr}/E_t & 1/E_t & -\nu_{tz}/E_t & 0 \\ -\nu_{zr}/E_z & -\nu_{zt}/E_z & 1/E_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{rz} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Matica $[C]$ je definovaná 2 nezávislými konštantami, pretože prvky prvej submatice sú viazané podmienkami symetrie. Po inverzii matice poddajnosti $[C]$ dostaneme maticu tuhosti materiálu $[D]$ v tvare

$$[D] = \bar{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ 0 & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \bar{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.96)$$

2.4.3 Rovinné izoparametrické konečné prvky

Izoparametrické prvky sú charakteristické tým, že tvarové funkcie sú vyjadrené v tvare polynómu v závislosti na prirodzených súradniciach a so vzrastajúcim stupňom polynómu narastá aj počet uzlov delenia na prvku. Tvarové funkcie, ktoré sa používajú pre interpoláciu posunov sa rovnako používajú aj pre interpoláciu geometrie prvku, t.j. platí

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i \quad (2.97)$$

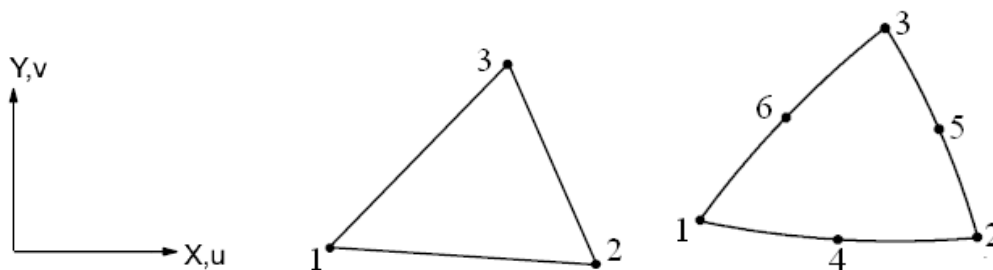
$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i$$

kde n je počet uzlov prvku. Tvarové funkcie majú takú vlastnosť, že v uzle prvku v ktorom sú definované majú hodnotu 1 a v ostatných hodnotu 0, t.j. platí

$$\sum_{k=1}^n N_k(\xi_i, \eta_i) = 1, \quad \forall i = 1..n \quad (2.98)$$

kde ξ_i, η_i sú súradnice vybraného uzla daného prvku.

Izoparametrické trojuholníkové prvky sú charakteristické tým, že tvarové funkcie $N_i(\xi, \eta)$ sú definované v prirodzených súradniciach ξ a η , pre ktoré platí $0 \leq \xi \leq 1$ a $0 \leq \eta \leq 1$.



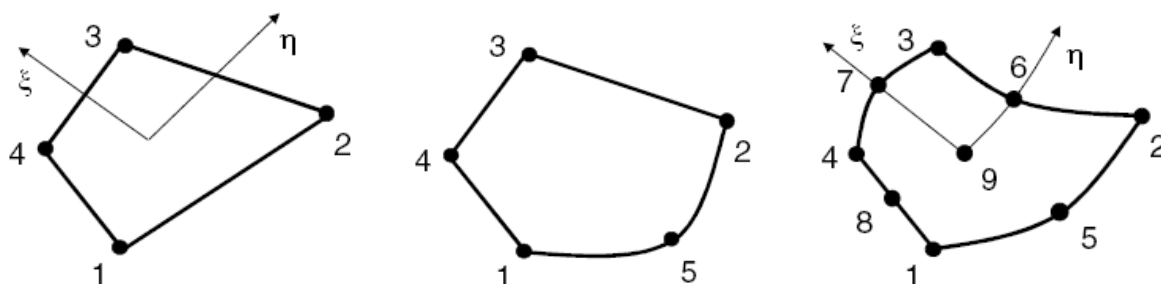
Obr.2.14 Trojuholníkové izoparametrické prvky

Tab2.2 Tvarové funkcie trojuholníkového dvojrozmerného prvku

Uzol			Tvarová funkcia	Voliteľné uzly		
i	ξ_i	η_i	$N_i(\xi, \eta)$	4	5	6
1	0	0	$N_1 = 1 - \xi - \eta$	$-N_4/2$		$-N_6/2$
2	1	0	$N_2 = \xi$	$-N_4/2$	$-N_5/2$	
3	0	1	$N_3 = \eta$		$-N_5/2$	$-N_6/2$
4	1/2	0	$N_4 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$			
5	1/2	1/2	$N_5 = 4\xi\eta$			
6	0	1/2	$N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$			

Z tvarových funkcií v tabuľke 2.2 vyplýva, že obecný tvar trojuholníkového prvku v kartézskych súradniciach sa transformuje na pravouhlý trojuholník s odvesnami jednotkovej dĺžky. Tvarové funkcie pre trojuholníkové dvojrozmerné prvky s 3-uzlami až 6-uzlami sú uvedené v tabuľke 2.2. Pôvodné tvarové funkcie pre trojuzlový prvok sa modifikujú v prípade zavedenia niektorých z voliteľných uzlov (4 až 6) na prvok.

Izoparametrické štvoruholníkové prvky sú charakteristické tým, že tvarové funkcie $N_i(\xi, \eta)$ sú definované v prirodzených súradniciach s a t , pre ktoré platí $-1 \leq \xi \leq 1$ a $-1 \leq \eta \leq 1$. Z tvarových funkcií v tabuľke 2.3 vyplýva, že obecný tvar štvoruholníkového prvku v kartézskych súradniciach sa transformuje na štvorec s jednotkovými súradnicami vo vrchole prvku.



Obr.2.15 Štvoruholníkové izoparametrické prvky – lineárny, prechodový a kvadratický
Izoparametrické prvky (pre vyšší polynóm ako stupňa 1) takto môžu opísať aj zakrivenú hranu oblasti.

Tab2.3 Tvarové funkcie štvoruholníkového dvojrozmerného prvku

Uzo l i	ξ_i	η_i	Tvarová funkcia $N_i(\xi, \eta)$	Voliteľné uzly				
				5	6	7	8	9
1	-1	-1	$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4$	$-N_5/2$			$-N_8/2$	$-N_9/4$
2	1	-1	$N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$			$-N_9/4$
3	1	1	$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4$		$-N_6/2$	$-N_7/2$		$-N_9/4$
4	-1	1	$N_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4$			$-N_7/2$	$-N_8/2$	$-N_9/4$
5	0	-1	$N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$					$-N_9/2$
6	1	0	$N_6 = (1+\xi)(1-\eta^2)/2$					$-N_9/2$
7	0	1	$N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$					$-N_9/2$
8	-1	0	$N_8 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$					$-N_9/2$
9	0	0	$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

Tvarové funkcie pre štvoruholníkové dvojrozmerné prvky so 4-uzlami až 9-uzlami sú uvedené v tabuľke 2.3. Pôvodné tvarové funkcie pre štvoruzlový prvok sa modifikujú v prípade zavedenia niektorých z voliteľných uzlov (5 až 9) na prvok. Pomerné deformácie na prvku sú definované ako derivácie funkcií premiestnenia $u(\xi, \eta)$ podľa súradníc x a y . Tieto derivácie si musíme vyjadriť z pravidiel derivovania zloženej funkcie

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{alebo} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

kde matica $[J]$ je Jacobianova matica, ktorú získame z nasledovných vzťahov

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_{i,\xi} x_i & \sum N_{i,\xi} y_i \\ \sum N_{i,\eta} x_i & \sum N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

Pomerné derivácie získame inverziou vzťahov (2.99)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

kde determinant Jacobianovej matice je $|J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ a geometricky predstavuje veľkosť plochy prvku.

Diferenciálnu plochu prvku v integrálnych výrazoch pre vyjadrenie matice tuhosti a vektorov zaťaženia $dS = dxdy = |J|d\xi d\eta$.

Maticu tuhosti štvoruholníkového prvku transformujeme do izoparametrických súradníc a vyjadríme s využitím gaussovho pravidla numerickej integrácie nasledovne

$$\begin{aligned} [K] &= \int \int [B]^T [D][B] dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] |J| d\xi d\eta = \\ &= \sum_{p=1}^{ngaus} \sum_{q=1}^{ngaus} W_p W_q [B(\xi_p, \eta_q)]^T [D][B(\xi_p, \eta_q)] |J(\xi_p, \eta_q)| \end{aligned} \quad (2.102)$$

kde $ngaus$ je počet gaussových bodov; ξ_p, η_q sú súradnice gaussových bodov; W_p, W_q sú váhy numerickej integrácie. V prípade gaussovho pravidla 2x2 je $\xi_p = \eta_q = \pm 1/\sqrt{3}$, $W_p = W_q = 1$. Obdobne si môžeme vyjadriť aj vektory zaťaženia od objemových a povrchových síl na prvku.

Definujme si **okrajové podmienky** na hrane steny pre nasledovné typy podoprenia :

a) **Votknutie hrany** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(a1) \ u(x, y_o) = 0 \quad (a2) \ v(x, y_o) = 0$$

b) **Voľný koniec hrany** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(b1) \ \sigma_y(x, y_o) = 0 \quad (b2) \ \tau_{xy}(x, y_o) = 0$$

Podmienky (b) nemôžu byť splnené na konečnom prvku.

c) **Os symetrie** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(c1) \ v(x, y_o) = 0 \quad (c2) \ \tau_{xy}(x, y_o) = 0$$

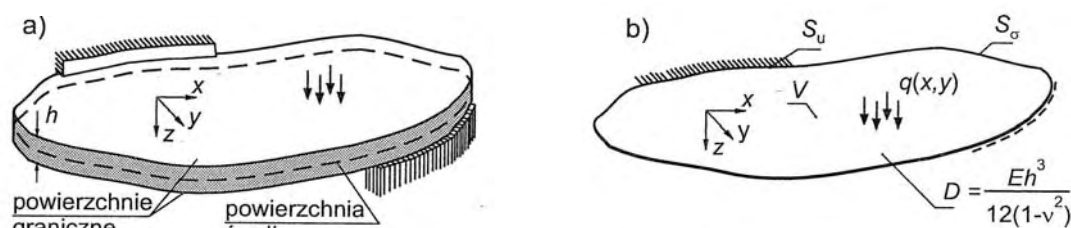
Podmienka (c2) nemôže byť splnená na konečnom prvku.

Z rekapitulácie okrajových podmienok vyplýva, že podmienky s deriváciami základných deformačných premenných, ako aj statické okrajové podmienky nemôžu byť splnené na konečnoprvkovom modeli.

2.4.4 Ohybový stav napätosti

S ohybovým stavom napätosti sa stretávame v prípade namáhania rovinných telies (dosiek) so zaťažením orientovaným kolmo na strednicovú rovinu. Podľa pomeru hrúbky k charakteristickým rozmerom telesa v strednicovej rovine rozlišujeme tri typy dosiek

- Tenká doska $(1/50 < h/l < 1/10)$
- Stredne hrubá doska $(1/10 < h/l < 1/5)$
- Hrubá doska $(1/5 < h/l)$



Obr.2.16 Tenká doska a) skutočné teleso dosky, b) rovinný model dosky

Teória dosiek vychádza z hypotéz o rovinnosti normál kolmých na strednicovú rovinu pred a po deformácii a o zanedbaní deformácií v smere kolmom na strednicovú rovinu.

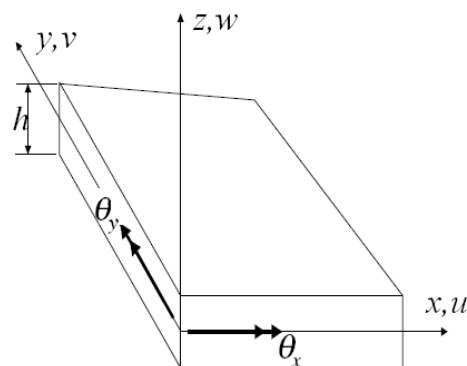
Tenčná doska – teória ohybu dosky vychádza z Kirchhoffovej hypotézy o zachovaní kolmosti normál na strednicovú rovinu pred a po deformácii.

Stredne hrubá doska - teória ohybu dosky vychádza z Reissner-Mindlinovej hypotézy o pootočení normál kolmých na strednicovú rovinu pred deformáciou o šmykovú deformáciu.

Hrubá doska - teória ohybu dosky je nedostatočná a je potrebné pristúpiť k zohľadneniu vplyvu deformácií aj v smere kolmom na strednicovú rovinu, odporúča sa riešiť ich za uvaženia priestorového stavu napätosti.

Na základe hypotéz o zachovaní rovinnosti prierezu po deformácii a pootočení normály na strednicovú rovinu v rovinách zx a yz vyjadríme zložky posunov v tvare

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z.\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z.\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2.103)$$



Obr.2.17 Schéma deformácie dosky

Mindlinová teória ohybu uvažuje s vplyvom šmykovej deformácie na ohyb dosky. Po dosadení vzťahov (2.103) do geometrických rovníc pre šmykové deformácie v rovinách yz a zx dostaneme

$$\begin{aligned}\gamma_{zx}(x, y, z) &= \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial x} + \theta_y(x, y, 0) = \gamma_{zx}(x, y, 0) \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &= \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial y} - \theta_x(x, y, 0) = \gamma_{yz}(x, y, 0)\end{aligned}\quad (2.104)$$

Zo vzťahov (2.103) a (2.104) vyplýva, že šmykové deformácie $\gamma_{yz}(x, y, 0)$ a $\gamma_{zx}(x, y, 0)$ po výške prierezu sú konštantné (nezávislé od súradnice z). Pootočením normály dostaneme zo vzťahov (2.104) v tvare

$$\begin{aligned}\theta_y(x, y) &= -\frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial x} + \gamma_{zx}(x, y, 0) = -w_{,x}(x, y, 0) + \gamma_{zx}(x, y, 0) \\ \theta_x(x, y) &= \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial y} + \gamma_{yz}(x, y, 0) = w_{,y}(x, y, 0) + \gamma_{yz}(x, y, 0)\end{aligned}\quad (2.105)$$

V prípade Kirchhoffovej hypotézy sa zanedbáva vplyv šmykových deformácií ($\gamma_{yz}(x, y, 0) \cong 0$ a $\gamma_{zx}(x, y, 0) \cong 0$) a potom pootočenie normály vyjadríme v tvare

$$\begin{aligned}\theta_y(x, y) &= -\frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial x} = -w_{,x}(x, y, 0) \\ \theta_x(x, y) &= \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial y} = w_{,y}(x, y, 0)\end{aligned}\quad (2.106)$$

Zložky vektora pomerných deformácií na doske dostaneme z geometrických rovníc (2.2) a vzťahov (2.103) v tvare

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} = z \theta_{y,x} \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} = -z \theta_{x,y} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} = z(\theta_{y,y} - \theta_{x,x})\end{aligned}\quad (2.107)$$

Z fyzikálnych rovníc pre rovinný stav napätosti vyjadríme zložky napätia v rovine xy v tvare

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{E \cdot z}{1-\nu^2}(\theta_{y,x} - \nu \theta_{x,y}) \\ \sigma_y(x, y, z) &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{E \cdot z}{1-\nu^2}(-\theta_{x,y} + \nu \theta_{y,x})\end{aligned}\quad (2.108)$$

$$\tau_{xy}(x, y, z) = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E \cdot z}{2(1+\nu)} (\theta_{y,y} - \theta_{x,x})$$

V prípade Mindlinovej teórie ohybu dosky uvažujeme aj so šmykovými napätiami v smere osi Z

$$\tau_{zx}(x, y, z) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{zx} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (w_{,x} + \theta_{y,y}) \quad (2.109)$$

$$\tau_{zy}(x, y, z) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{zy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (w_{,y} - \theta_{x,x})$$

Vnútorne sily na doskách definujeme ako integrálne výslednice napätí v rovinách kolmých na strednicovú rovinu. Vektor vnútorných síl obsahuje 5 zložiek :

- Intenzita ohybových momentov

$$m_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = D (\theta_{y,x} - \nu \theta_{x,y}) \quad (2.110)$$

$$m_y(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = D (-\theta_{x,y} + \nu \theta_{y,x})$$

- Intenzita ohybovo krútiacich momentov

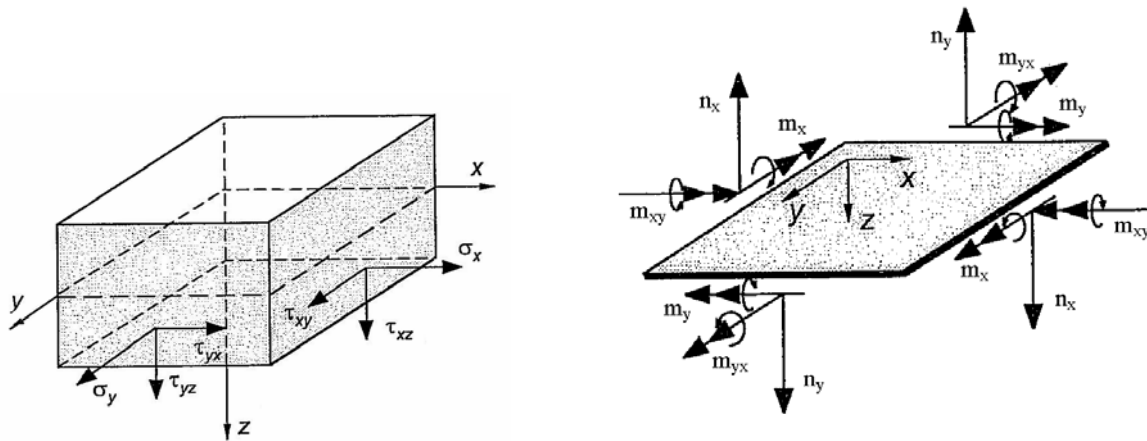
$$m_{xy}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = D (1-\nu) (\theta_{y,y} - \nu \theta_{x,x}) \quad (2.111)$$

- Intenzita šmykových síl

$$n_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = D (w_{,x} + \theta_{y,y}) \quad (2.112)$$

$$n_y(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = D (w_{,y} - \theta_{x,x})$$

kde valcová tuhosť dosky je definovaná v tvare $D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$.



Obr.2.18 Schéma orientácie napätí a vnútorných síl na elemente dosky

V prípade riešenia dosiek na báze MKP aproximujeme zložky vektora premiestnenia na konečnom prvku a riešenie stavu napätosti a deformácie dosky hľadáme v tvare algebrických rovníc po uplatnení vety o virtuálnej práci.

Vektor premiestnenia v uzle prvku definujeme v tvare

$$\{u\} = \{w, \theta_x, \theta_y\} \quad (2.113)$$

Zložky vektora premiestnenia aproximujeme

$$w = \sum w_i N_i, \quad \theta_x = \sum \theta_{xi} N_i, \quad \theta_y = \sum \theta_{yi} N_i \quad (2.114)$$

Potom vektor premiestnenia na prvku s n -uzlami vyjadríme v tvare

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \end{Bmatrix} \quad (2.115)$$

Vektor pomerných deformácií a napätí vo vzťahu pre virtuálnu prácu vnútorných síl upravíme tak, že z vektora pomerných deformácií vyjmeme súradnicu z a prisúdime ju vektoru napätia. Potom po integrácii po hrúbke dosky dostaneme z vektora napätí vektor intenzity vnútorných síl a z vektora pomerných deformácií vektor pretvorení odpovedajúcich zložkám vnútorných síl na doske. Virtuálnu prácu vnútorných síl na pretvoreniach vyjadríme v tvare

$$\delta A = \int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_S \{\delta q\}^T \{Q\} dS, \quad (2.116)$$

kde vektor pretvorenia je $\{q\} = \{\theta_{y,x}, -\theta_{x,y}, \theta_{y,y} - \theta_{x,x}, w_{,x} + \theta_{y,y} - \theta_{x,x}\}^T$ a vektor vnútorných síl $\{Q\} = \{m_x, m_y, m_{xy}, n_x, n_z\}^T$ dostaneme zo vzťahu (2.116) po dosadení vzťahov (2.107) až (2.109).

Vektor pretvorenia $\{q\}^T$ v (2.116) vyjadríme v maticovom tvare s využitím vzťahov (2.115)

$$\{q\} = [\partial]^T \{u\} = [\partial]^T [N] \{r\} = [\tilde{B}] \{r\}, \quad (2.117)$$

kde operátorova matica $[\partial]$ má tvar

$$\{\partial\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Ak vychádzame z teórie rovinného stavu napätosti (2.92) pri namáhaní dosky na ohyb, tak fyzikálne rovnice medzi vektorom pomerných deformácií $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$ a napätí

$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T$ pre izotropný materiál vyjadríme v tvare

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (2.119)$$

kde

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \beta \end{bmatrix},$$

súčiniteľ $\beta = 5/6$ vystihuje efektívnu šmykovú plochu dosky, t.j. vplyv zjednodušujúceho predpokladu o konštantnom priebehu šmykových napätí po výške prierezu dosky na deformačnú prácu šmykových zložiek napätia.

Po integrácii napätí po výške prierezu dostaneme závislosť vektora vnútorných síl

$\{Q\} = \{m_x, m_y, m_{xy}, n_x, n_z\}^T$ na vektore pretvorenia

$\{q\} = \{\theta_{y,x}, -\theta_{x,y}, \theta_{y,y} - \theta_{x,x}, w_{,x} + \theta_{y,y} - \theta_{x,x}\}^T$ v tvare

$$\{Q\} = [\tilde{D}]\{q\}, \quad (2.120)$$

kde

$$[\tilde{D}] = \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\beta \end{bmatrix}$$

Maticu tuhosti konečného prvku dosky dostaneme zo vzťahu (2.31)

$$[K] = \iint_S [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] dS, \quad (2.121)$$

kde tvarovú maticu pretvorení $[\tilde{B}]$ uvažujeme podľa (2.117) a maticu tuhosti materiálu $[\tilde{D}]$ podľa (2.120).

V prípade tenkej dosky sa práca šmykových deformácií zanedbáva (Kirchhoffova hypotéza) a teda vektor pretvorení sa uvažuje v tvare $\{q\} = \{\theta_{y,x}, -\theta_{x,y}, \theta_{y,y} - \theta_{x,x}\}^T$ pre odpovedajúci vektor vnútorných síl $\{Q\} = \{m_x, m_y, m_{xy}\}^T$. Maticu tuhosti tenkej dosky potom dostaneme zo vzťahov (2.121) pre redukované vektory pretvorení a vnútorných síl.

Definujme si **okrajové podmienky** na hrane dosky pre nasledovné typy podoprenia :

d) **Voľné hrany** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(a1) \ w(x, y_o) = 0 \quad (a2) \ \theta_x(x, y_o) = 0 \quad (a3) \ \theta_y(x, y_o) = 0 \quad (a4) \ \theta_{y,x}(x, y_o) = 0$$

Podmienka (a4) nie je splnená na konečnom prvku (parameter $\theta_{y,x}$ nie je definovaný vo vektore $\{r\}$).

e) **Kĺbové uloženie hrany** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(b1) \ w(x, y_o) = 0 \quad (b2) \ \theta_y(x, y_o) = 0 \quad (b3) \ \theta_{y,x}(x, y_o) = 0$$

Podmienka (b3) nie je splnená na konečnom prvku.

f) **Voľný koniec hrany** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(c1) \ n_y(x, y_o) = 0 \quad (c2) \ m_y(x, y_o) = 0$$

Podmienky (c) nemôžu byť splnené na konečnom prvku.

g) **Os symetrie** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(d1) \theta_x(x, y_o) = 0$$

h) **Os antimetrie** rovnobežnej s osou x , t.j. pre $y = y_o$

$$(e1) n_y(x, y_o) = 0$$

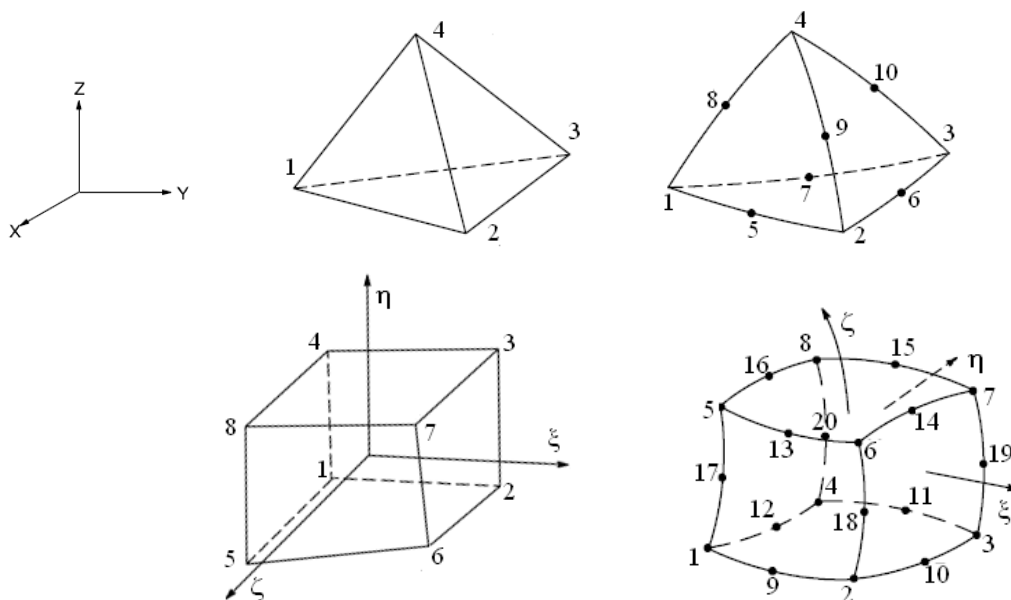
Podmienka (e) nemôže byť splnená na konečnom prvku.

Z rekapitulácie okrajových podmienok vyplýva, že podmienky s vyššími deriváciami základných deformačných premenných, ako aj statické okrajové podmienky nemôžu byť splnené na konečnoprvkovom modeli. Toto je dôsledok približného riešenia úloh mechaniky v MKP. S riešením takýchto úloh sa zaoberajú penalizačné metódy s cieľom eliminovania zložiek vnútorných síl na definovanej hranici [].

2.5 Trojrozmerné úlohy

Pre priestorový stav napätosti definujeme 6 zložkový vektor pomerných deformácií a napätí v tvare $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$ a $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$. Základné vzťahy pre priestorový stav napätosti sú definované v kap.2.1.

2.5.1 Priestorové konečné prvky



Obr.2.19 Priestorové konečné prvky – lineárne a kvadratické

Pre riešenie stavu napätosti a deformácie priestorových telies sa najčastejšie používa štvorsten s 3 uzlami (lineárna aproximácia) a s 9 (kvadratická aproximácia) uzlami alebo šesťsten s 8 uzlami (lineárna aproximácia) a s 20 uzlami (kvadratická aproximácia).

Vektor posunov na prvku je definovaný tromi zložkami u , v a w v smere osí x , y a z

$$\{u\} = \{u, \quad v, \quad w\}^T \quad (2.122)$$

V prípade štvorstena s 3 uzlami si každú zložku vektora posunov aproximujeme lineárnym polynómom v tvare

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (2.123)$$

Vektor posunov $\{u\}$ na prvku vyjadríme v maticovom tvare nasledovne

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{\alpha\} \quad (2.124)$$

Na prvku máme zvolených celkovo 12 koeficientov lineárneho polynómu v priestore xyz.

Tieto koeficienty si určíme z 12 deformačných parametrov definovaných v uzloch prvku

$$\{r\} = \{u_1, \quad v_1, \quad w_1, \quad \dots, \quad u_{12}, \quad v_{12}, \quad w_{12}\}^T \quad (2.125)$$

Potom pre štyri uzly prvku si vyjadríme všetky zložky posunu podľa (2.124)

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ w_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{12} & y_{12} & z_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha\} \quad (2.126)$$

Tvarovú maticu deformačných parametrov na prvku $[N]$ získame zo vzťahov (2.124) a

(2.126) obdobne ako v kapitole 2.1, vzťah (2.4) a vektor posunov na prvku vyjadríme v tvare

$$\{u\} = [\Phi] \{\alpha\} = [\Phi] [A^{-1}] \{r\} = [N] \{r\} \quad (2.127)$$

teda zložku posunu na prvku vyjadríme v tvare

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y, z) u_i \quad (2.128)$$

kde pre $i=1$ máme $N_1 = (1/6V)(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z)$ pre $6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$

$$a_1 = \det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad b_1 = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad c_1 = -\det \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = -\det \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Vektor pomerných deformácií na prvku jednoducho zo vzťahu (2.127) prenásobením operátorovej matice $[\partial]$ s tvarovou maticou $[N]$ obdobne ako v (2.26)

$$\{\varepsilon\} = [\partial][N]\{r\} = [B]\{r\} = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & [B_3] & [B_4] \end{bmatrix} \{r\}, \quad (2.129)$$

$$\text{kde} \quad [B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad \forall i = 1 \text{ až } 4$$

Obdobným spôsobom získame tvarové matice ostatných typov prvkov.

Aproximácia posunu na 10 uzlovom štvorstennom prvku je

$$u = u_1(2N_1 - 1)N_1 + u_2(2N_2 - 1)N_2 + u_3(2N_3 - 1)N_3 + u_4(2N_4 - 1)N_4 + \\ + 4(u_5N_1N_2 + u_6N_2N_3 + u_7N_1N_3 + u_8N_1N_4 + u_9N_2N_4 + u_{10}N_3N_4) \quad (2.130)$$

pre zložky v a w platia obdobné vzťahy.

Aproximácia posunu na 8 uzlovom izoparametrickom šesťstennom prvku je

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \quad \forall \quad N_i = (1/8)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad (2.131)$$

pre $n = 8$, $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ a $-1 \leq \zeta \leq 1$.

Aproximácia posunu na 20 uzlovom izoparametrickom šesťstennom prvku (N_i^8) vychádza z tvarových funkcií 8 uzlového lineárneho prvku (N_i^8) s tým, že od tvarových funkcií vo vrcholoch odčítame tvarové funkcie existujúcich uzlov v strede hrán

$$N_i^{20} = N_i^8 - 1/2 \sum_k N_k \quad \forall \quad N_k = (1/4)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_k)(1 + \zeta\zeta_k) \quad \text{pre } \xi = 0$$

$$N_k = (1/4)(1 + \xi\xi_k)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_k) \quad \text{pre } \eta = 0,$$

$$N_k = (1/4)(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)(1 - \zeta^2) \quad \text{pre } \zeta = 0,$$

Tvarové funkcie N_k sa modifikujú cyklickou zámenou indexov a teda sa uvažujú v závislosti na tom, v ktorej rovine sa nachádza uzel k daného prvku. Pokiaľ na príľahlej hrane prvku k uzlu i sa nenachádza medziuzol, tak $N_k = 0$.

3. STABILITNÉ ÚLOHY V MECHANIKE KONŠTRUKCIÍ

V praxi sa stretávame s prípadmi vyšetrovania straty stability za statického zaťaženia a lineárneho chovania sa materiálu. V obecnom prípade je problém stability problémom nelineárnym. Úplne riešenie je možné získať len použitím metód nelineárnej mechaniky. Tu sa budeme zaoberať lineárnou stabilitou prútových a doskových konštrukcií. Ide v podstate o hľadanie kritického zaťaženia. Formulácia úlohy je jednoduchá a vychádza z podmienky rovnováhy na deformovateľnej konštrukcii. Oproti klasickej lineárnej mechanike v podmienke rovnováhy pribudne člen s maticou počiatočných napätí. V skutočnosti sa jedná o kombináciu účinku membránového (stenového) a ohybového (doskového) stavu napätosti. Za predpokladu malých deformácií a nedeformovaného stavu napätosti tieto dva účinky navzájom nesúvisia. Maticu tuhosti prvku vyjadríme v tvare $[[K]+[K_G]]$, kde matica $[K_G]$ je závislá na vektore zaťaženia $\{F\}$. S narastajúcim zaťažením $\{F\} = \lambda \{F_o\}$ mení sa úmerne aj matica tuhosti $[K_G]$. Problém lineárnej stability vyjadríme v tvare rovnice

$$[[K]+\lambda[K_G]]\{r\} = \lambda\{F_o\} \quad (3.1)$$

kde vektor zobecnených deformačných parametrov $\{r\}$ sa vyjadrí z rovnice v tvare

$$\{r\} = [[K]+\lambda[K_G]]^{-1} \lambda\{F_o\} \quad (3.2)$$

V momente kolapsu na sústavu nepôsobí vektor sily $\{F\}$ a rovnica (3.1) sa zmení na tvar

$$[[K]+\lambda[K_G]]\{r\} = \{0\}$$

Podmienkou netriviálneho riešenia rovnice je, aby determinant matice podmienok rovnováhy bol rovný nule

$$\det[[K]+\lambda[K_G]] = 0 \quad (3.3)$$

z riešenia ktorej určíme hodnoty súčiniteľa λ . Vektor kritických síl $\{F_{cr}\}$ si potom vyjadríme zo súčiniteľa λ

$$\{F_{cr}\} = \lambda\{F_o\} \quad (3.4)$$

Z pohľadu definície kritického zaťaženia má najväčší význam najnižšie vlastné číslo získané z riešenia úlohy (3.4).

4. DYNAMICKE ÚLOHY V MECHANIKE KONŠTRUKCIÍ

V predchádzajúcej kapitole sme sa zaoberali úlohami v MKP, kedy pôsobí na teleso časovo nezávislé zaťaženie. V praxi sa však často stretávame s úlohami, kedy na teleso pôsobia v čase premenné zaťaženia. V prípade, že sa jedná o časové zmeny pohybujúce sa rádovo v sekundách a menej, hovoríme o dynamických (nestacionárnych) úlohách. Pri dynamickej úlohe môžeme rovnice rovnováhy (2.30) napísať v tvare

$$[K]\{r(t)\} = \{F(t)\}, \quad (4.1)$$

kde vektor síl $\{F(t)\}$ je potrebné doplniť o zotrvačné a tlmiace sily. Vychádzajúc z d'Alambertovho princípu môžeme zotrvačné sily $\{F_m\}$ vyjadriť v závislosti na zrýchlení $\{\ddot{u}\}$ a tlmiace sily $\{F_c\}$ v závislosti na rýchlosti $\{\dot{u}\}$. Vo formulácii MKP tieto sily jednoducho vyjadríme z výrazu pre objemové sily $\{F_b\}$ (2.31)

$$\{F(t)\} = \{F_b\} + \{F_m\} + \{F_c\} \quad (4.2)$$

$$\{F(t)\} = \int_V [N]^T (\{b\} - \rho\{\ddot{u}\} - \kappa\{\dot{u}\}) dV = \int_V [N]^T (\{b\} - \rho[N]\{\ddot{r}\} - \kappa[N]\{\dot{r}\}) dV$$

$$\text{kde } \{F_m\} = -\int_V \rho[N]^T [N] dV \{\ddot{r}\} = -[M]\{\ddot{r}\} \quad \text{a} \quad \{F_c\} = -\int_V \kappa[N]^T [N] dV \{\dot{r}\} = -[C]\{\dot{r}\},$$

pričom $\{\dot{r}\}$ a $\{\ddot{r}\}$ sú vektory parametrov rýchlostí a zrýchlenia elementu, je vektor parametrov rýchlostí elementu, ρ je špecifická hmotnosť, κ je parameter útlmu, $[M]$ je matica hmotnosti prvku, $[C]$ je matica útlmu prvku.

Dosadením (4.2) do (4.1) dostaneme pohybové rovnice prvku v tvare

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{F\} \quad (4.3)$$

V prípade seizmického budenia sa vychádza z predpokladu, že konečnoprvkový model nachádzajúci sa na pohybujúcej zemi je namáhaný zotrvačnými silami pôsobiace v jednotlivých bodoch diskretizácie s koncentrovanou hmotnosťou

$$\{F\} = -[M]\{\ddot{r}_b\}, \quad (4.4)$$

kde $\{\ddot{r}_b\}$ je vektor zrýchlení na úrovni základov konštrukcie.

K pohybovým rovniciam celého telesa, resp. konštrukcie sa dostaneme superpozíciou virtuálnych prác síl na všetkých prvkoch telesa obdobne ako pri statickej úlohe (2.37) až (2.40).

Pohybové rovnice (4.3) riešime vo frekvenčnej oblasti alebo v čase. Podľa toho hovoríme o dvoch principiálnych metódach riešenia

- metódy modálnej analýzy
- metódy priamej integrácie v čase

4.1 Vlastné kmitanie

O vlastnom kmitaní telesa hovoríme, ak na pružné teleso prestane pôsobiť dynamické zaťaženie a teleso sa dostane do stavu ustáleného harmonického kmitania. Vychádza sa z predpokladu ideálneho pružného telesa bez tlmenia. Vektor posunov telesa $\{r(t)\}$ vyjadríme v tvare

$$\{r(t)\} = \{\Phi\} \sin \omega t, \quad \text{pre} \quad \{\Phi\} = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}^T \quad (4.5)$$

kde ω je vlastná kruhová frekvencia, $\{\Phi\}$ je vektor vlastného tvaru kmitania obsahujúci amplitúdy kmitania závislé od počiatočného impulzu. Z pohybovej rovnice (4.3) dostaneme za predpokladu nulového zaťaženia $\{F\} = \{0\}$ a po dosadení vzťahov (4.5) nezávislé rovnice voľného kmitania v tvare

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Phi\} = \{0\}, \quad (4.6)$$

Rovnice (4.6) majú nenulové riešenie pre $\{\Phi\}$, ak determinant matice koeficientov bude rovný nule

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0, \quad (4.7)$$

Z matematického hľadiska rovnica (4.7) predstavuje tzv. zovšeobecnený problém vlastných čísiel. Rozpísaním determinantu (4.7) dostaneme algebraickú rovnicu stupňa n pre výpočet ω^2 . Korene tejto rovnice predstavujú vo všeobecnosti n -vlastných čísiel, resp. n -kvadrátov vlastných uhlových frekvencií telesa

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_n^2 \quad (4.8)$$

Ľubovoľnej frekvencii ω_i možno zo vzťahu (4.6) priradiť vektor $\{\Phi\}_i$ - vlastný tvar kmitania telesa pri tejto frekvencii. Rovnici (4.6) vyhovujú aj vektory $c \cdot \{\Phi\}_i$, t.j. amplitúdy pre násobené ľubovoľnou konštantou c . Preto vlastný vektor môžeme normovať k jednotke.

V modálnej analýze je výhodné využiť ortonormálnosť vlastných vektorov

$$\{\Phi\}_i^T \{\Phi\}_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

Ďalšou významnou vlastnosťou vlastných tvarov je ich ortogonálnosť vzhľadom k maticiam $[K]$ a $[M]$, t.j. platí

$$\{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_j = 0 \quad \text{a} \quad \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = 0 \quad \text{pre } i \neq j \quad (4.10)$$

$$\{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_j = \omega_i^2 \quad \text{a} \quad \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = 1 \quad \text{pre } i = j \quad (4.11)$$

Významnosť toho ktorého tvaru pri danej frekvencii určuje podielový súčiniteľ γ_i

$$\gamma_i = \{\Phi\}_i^T [F] \quad \text{pre budenie silami} \quad (4.12)$$

$$\gamma_i = \{\Phi\}_i^T [M] \{D\} \quad \text{pre budenie v základoch (seizmicita)}$$

kde $\{D\} = \{D_1^a, D_2^a, D_3^a, \dots\}$ je vektor budenia jednotlivých stupňov voľnosti v smere osi a (pričom $a = x, y, z$). Ak sústava je budená silami, tak tieto determinujú hodnotu podielového súčiniteľa. V prípade budenia v základoch (seizmicita) je podielový súčiniteľ γ_i determinovaný množstvom zapojenia hmoty do výkmitu pri danej frekvencii. Súčiniteľ γ_i sa často vyjadruje v pomerných hodnotách normovaním k jednotke (najvyššia hodnota je rovná 1 ostatné sú menšie).

Efektívna hmotnosť M_{ei} nám určuje množstvo hmoty z celkovej hmotnosti telesa, ktorá sa dostane do pohybu pri danej frekvencii

$$M_{ei} = \frac{\gamma_i^2}{\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i} \quad (4.13)$$

V prípade, že normujeme vektory vlastných čísiel podľa (), dostaneme efektívnu hmotnosť totožnú s hodnotou podielového súčiniteľa $M_{ei} = \gamma_i$. Medzinárodné štandardy definujú požiadavky na modálnu analýzu hodnotou celkového množstva efektívnej hmoty sústavy (podľa Eurokódu $\sum_i M_{ei} \geq 0,8 M_{tot}$).

Pre výpočet vlastných čísiel a tvarov z rovnice (4.6) sa vyžívajú iteračné metódy ako Jacobiho metóda rotácií, metóda iterácie podpriestoru alebo Lanczosova metóda. Pre veľké systémy rovníc sa najčastejšie odporúča Lanczosova metóda z hľadiska rýchlosti konvergenzie a relatívne malej náročnosti na kapacitu disku.

4.2 Vynútené kmitanie lineárnych sústav

O vynútenom kmitaní hovoríme, ak na konštrukciu pôsobí dynamické zaťaženie a konštrukcia sa dostane do pohybu. V čase premenné zaťaženie môžeme rozdeliť podľa rôznych hľadísk na

zaťaženie silami, pretvorením, posunmi alebo na zaťaženie periodické, harmonické, neperiodické alebo na zaťaženie deterministické a stochastické. Vynútené kmitanie môže byť v zásade riešené dvomi spôsobmi

- priamou integráciou pohybovej rovnice
- rozvojom do vlastných tvarov kmitania

Obidve metódy dávajú teoreticky rovnaké výsledky. Rozdiel je len v tom, že pri rozvoji do vlastných tvarov sa v bežnej praxi nepoužívajú všetky tvary, ale len výber rozhodujúcich tvarov tak, aby efektívna hmotnosť dosiahla minimálne 80% z celkovej hmotnosti sústavy.

4.2.1 Priama integrácia v čase

Základnou myšlienkou metódy priamej integrácie v čase je že pohybové rovnice (4.3) splníme len v konečnom počte okamžikov $t_0, t_1, \dots, t_n$. Dĺžka integračného kroku je definovaná ako vzdialenosť medzi dvomi po sebe idúcimi časovými okamžikmi

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \text{kde} \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (4.14)$$

Počiatkové podmienky numerickej integrácie sú definované v čase $t = 0$

$$\{r(0)\} = \{r_0\}, \quad \{\dot{r}(0)\} = \{\dot{r}_0\} \quad (4.15)$$

Pre numerickú integráciu je možné použiť tri metódy

- explicitnú
- implicitnú
- prediktor a korektor

Metódu explicitnú a implicitnú považujeme za základné. Metóda prediktor a korektor je v podstate známa ako simulačná metóda. Využíva sa predovšetkým pri riešení nelineárnych úloh.

V **explicitnej metóde** sa na základe predpokladu o priebehu pohybových charakteristík $\{r\}, \{\dot{r}\}, \{\ddot{r}\}$ v intervale $< t, t + \Delta t >$ a poznania ich hodnôt v okamžiku , vypočítame z pohybovej rovnice (4.3) vektory $\{r_{t+\Delta t}\}, \{\dot{r}_{t+\Delta t}\}, \{\ddot{r}_{t+\Delta t}\}$. V explicitných metódach sa nerobí triangulácia (faktorizácia) matice tuhosti, ani jej modifikácia, ale triangulácia matice hmotností. Explicitná metóda sa používa v kombinácii s diagonálnou maticou sústredených hmotností. Explicitná metóda je vhodná na riešenie problémov rázového zaťaženia a nelineárnych úloh.

Implicitné metódy naopak využívajú rovnicu (4.3) v čase $t + \Delta t$. Sú vhodné na riešenie inerciálnych problémov, t. j. problémov ako seizmické zaťaženie alebo neperiodické kmitanie

v určitom časovom úseku. Stabilita numerických metód obecné závisí od veľkosti integračného kroku.

Diferenčná metóda (explicitná)

Diferenciálne vzťahy pretransformujeme na diferenčné na základe nasledovných jednoduchých vzťahov

$$\{\dot{r}_t\} = (1/2\Delta t)(\{r_{t+\Delta t}\} - \{r_{t-\Delta t}\}), \quad \{\ddot{r}_t\} = (1/\Delta t^2)(\{r_{t+\Delta t}\} - 2\{r_t\} + \{r_{t-\Delta t}\}), \quad (4.16)$$

ktoré dosadíme do vzťahov (4.3) a upravíme do nasledovného tvaru

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}[M] + \frac{1}{2\Delta t}[C]\right)\{r_{t+\Delta t}\} = \{F_t\} - \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2}[M]\right)\{r_t\} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}[M] - \frac{1}{2\Delta t}[C]\right)\{r_{t-\Delta t}\} \quad (4.17)$$

Diferenčná metóda je explicitnou metódou, lebo nevyžaduje trianguláciu matice tuhosti $[K]$.

Metóda je podmiennečne stabilná podmienkou $\Delta t \leq T_{min}/\pi$, kde T_{min} je najmenšia perióda kmitania.

Newmarkova metóda (implicitná)

Newmarkova metóda je metódou implicitnou a vychádza z predpokladu konštantného zrýchlenia. Základné vzťahy vychádzajú z nasledovných predpokladov

$$\{\dot{r}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{r}_t\} + [(1-\delta)\{\ddot{r}_t\} + \delta\{\ddot{r}_{t+\Delta t}\}]\Delta t, \quad (4.18)$$

$$\{r_{t+\Delta t}\} = \{r_t\} + \{\dot{r}_t\}\Delta t + [(1/2-\alpha)\{\ddot{r}_t\} + \alpha\{\ddot{r}_{t+\Delta t}\}]\Delta t^2,$$

Parametre α , δ ovplyvňujú stabilitu riešenia. Pohybové rovnice sa po dosadení (4.18) zmenia na tvar

$$(a_0[M] + a_1[C] + [K])\{r_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} + [M](a_0\{r_t\} + a_2\{\dot{r}_t\} + a_3\{\ddot{r}_t\}) + [C](a_1\{r_t\} + a_4\{\dot{r}_t\} + a_5\{\ddot{r}_t\}), \quad (4.19)$$

kde $a_0 = 1/\alpha\Delta t^2$, $a_1 = \delta/\alpha\Delta t$, $a_2 = 1/\alpha\Delta t$, $a_3 = 1/2\alpha - 1$, $a_4 = \delta/\alpha - 1$, $a_5 = \Delta t(\delta/\alpha - 2)/2$

Podľa Zienkiewicza [1] platia nasledovné podmienky konvergenie

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2, \quad \delta \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + \delta + \alpha > 0 \quad (4.20)$$

Newmarkove parametre sa do výpočtu zvyčajne zavádzajú v závislosti od amplitúdy klesajúceho parametra $\gamma \geq 0$, t.j. v tvare $\alpha = (1/4)(1+\gamma)^2$ a $\delta = 1/2 + \gamma$. Metóda je nepodmienené stabilná [1] pre $\alpha = 1/4$ a $\delta = 1/2$, čo odpovedá predpokladu konštantného priemerného zrýchlenia v čase.

Wilsonova θ -metóda (implicitná)

Wilsonova metóda je metódou implicitnou a vychádza z predpokladu lineárneho zrýchlenia. Základné vzťahy vychádzajú z nasledovných predpokladov

Obr.4.1

$$\begin{aligned}\{\ddot{r}_{t+\Delta t}\} &= \{\ddot{r}_t\} + [\{\ddot{r}_{t+\theta\Delta t}\} - \{\ddot{r}_t\}]\theta, \\ \{\dot{r}_{t+\Delta t}\} &= \{\dot{r}_t\} + \Delta t [\delta \{\ddot{r}_{t+\Delta t}\} + (1-\delta)\{\ddot{r}_t\}], \\ \{r_{t+\Delta t}\} &= \{r_t\} + \Delta t \{\dot{r}_t\} + \Delta t^2 [2\alpha \{\ddot{r}_{t+\Delta t}\} + (1-2\alpha)\{\ddot{r}_t\}]/2,\end{aligned}\quad (4.21)$$

Vzťahy (4.21) sú obdobné vzťahom (4.18) v Newmarkovej metóde. Stabilita a presnosť metódy závisí na voľbe koeficienta θ . Aby metóda bola stabilná, je nutné, aby $\theta \geq 1,37$.

Hilber-Hughes-Taylor α -metóda (implicitná)

α -metóda vychádza z Newmarkovej metódy a rieši pohybové rovnice v nasledovnom tvare

$$[M]\{\ddot{r}_{t,\alpha_m}\} + [C]\{\dot{r}_{t,\alpha_t}\} + [K]\{r_{t,\alpha_t}\} = \{F_{t,\alpha_t}\}, \quad (4.22)$$

$$\text{kde } \{\ddot{r}_{t,\alpha_m}\} = (1-\alpha_m)\{\ddot{r}_t\} + \alpha_m\{\ddot{r}_{t-\Delta t}\}, \quad \{\dot{r}_{t,\alpha_t}\} = (1-\alpha_t)\{\dot{r}_t\} + \alpha_t\{\dot{r}_{t-\Delta t}\} \quad (4.23)$$

$$\{r_{t,\alpha_t}\} = (1-\alpha_t)\{r_t\} + \alpha_t\{r_{t-\Delta t}\}, \quad \{F_{t,\alpha_t}\} = (1-\alpha_t)\{F_t\} + \alpha_t\{F_{t-\Delta t}\}$$

kde α_m, α_t sú dva špeciálne parametre pre interpoláciu v čase. Pokiaľ sú nulové, tak rovnice (4.22) vedú k metóde konštantného zrýchlenia. Po dosadení (4.23) do (4.22) dostaneme rovnice v tvare

$$\begin{aligned}(a_o[M] + a_1[C] + (1-\alpha_t)[K])\{r_{t+\Delta t}\} &= (1-\alpha_t)\{F_{t+\Delta t}\} + \alpha_t\{F_t\} - \alpha_t\{F_t^{\text{int}}\} + \\ [M](a_o\{r_t\} + a_2\{\dot{r}_t\} + a_3\{\ddot{r}_t\}) &+ [C](a_1\{r_t\} + a_4\{\dot{r}_t\} + a_5\{\ddot{r}_t\})\end{aligned}, \quad (4.24)$$

$$\text{kde } a_o = (1-\alpha_m)/\alpha\Delta t^2, \quad a_1 = (1-\alpha_t)\delta/\alpha\Delta t, \quad a_2 = (1-\alpha_m)/\alpha\Delta t, \quad a_3 = (1-\alpha_m)/2\alpha - 1,$$

$$a_4 = (1-\alpha_t)\delta/\alpha - 1, \quad a_5 = (1-\alpha_t)\Delta t(\delta/2\alpha - 1) \quad (4.25)$$

HHT α -metóda v podstate zavádza do pohybových rovníc proporčný útlm cez parameter α .

Tabuľka 4.1 Prehľad integračných parametrov modifikovanej Newmarkovej metódy

Metóda	δ	α	γ	$\Delta t/T$	Presnosť
Diferenčná	1/2	0	0	0,31 83	Vynikajúca pre malé Δt Nestabilná pre veľké Δt
Lineárne zrýchlenie	1/2	1/6	0	0,55 13	Veľmi dobrá pre malé Δt Nestabilná pre veľké Δt
Priemerné zrýchlenie	1/2	1/4	0	∞	Dobrá pre malé Δt Bez disipácie energie

4.2.2 Metóda rozkladu do vlastných tvarov

Metóda odozvy rozkladom do vlastných tvarov patrí medzi lineárne metódy odozvy a v prípade sústavy s n - stupňami voľnosti vychádzame z riešenia dynamickej rovnice (4.3). Vektor zaťaženia na pravej strane rovnice vyjadríme v obecnom tvare vo forme sumy J - zložiek závislých na čase odpovedajúcich zaťaženiu vetrom, kmitaním a seizmicite

$$\{F(t)\} = \sum_{j=1}^J \{f\}_j g(t)_j \quad (4.26)$$

kde vektor $\{f\}_j$ je priestorový vektor a $\{g(t)\}_j$ je časová funkcia.

V rovniciach (4.26) vektor parametrov posunov $\{r\}$ môžeme rozložiť do vektorov m - vlastných čísel zavedením nasledovnej substitúcie

$$\{r\} = \sum_{i=1}^m \{\Phi\}_i \cdot \{Y\}_i, \quad \{\dot{r}\} = \sum_{i=1}^m \{\Phi\}_i \cdot \{\dot{Y}\}_i, \quad \{\ddot{r}\} = \sum_{i=1}^m \{\Phi\}_i \cdot \{\ddot{Y}\}_i \quad (4.27)$$

kde $\{Y\}_i$ je vektor normálnych alebo zovšeobecnených súradníc ($m \times 1$), $\{\Phi\}_i$ je vektor vlastných tvarov ($m \times 1$) pre i -tý tvar kmitania, ktorý spĺňa podmienky ortogonalita matice hmotnosti a matice tuhosti (4.10)

$$\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i = 1 \quad \text{a} \quad \{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_i = \omega_i^2 \quad (4.28)$$

Dosadením rovníc (4.27) a (4.28) do (4.3) dostaneme dynamickú rovnicu pre jednohmotový systém

$$\{\ddot{Y}\}_i + 2\xi_i \omega_i \{\dot{Y}\}_i + \omega_i^2 \{Y\}_i = \sum_{j=1}^J \{p_i\}_j g(t)_j \quad (4.29)$$

kde $\{p_i\}_j = \{\Phi\}_i^T \{f\}_j$ je modálny podielový súčiniteľ pre j -funkciu zaťaženia, $\{Y\}_i$ je zovšeobecnená súradnica pre i -tý tvar, ξ_i je pomerný útlm pre i -tý tvar (vyjadrený pomerom útlmu ku kritickému), ω_i kruhová frekvencia i -tého tvaru systému. V prípade seizmickej udalosti vektor zaťaženia vyjadríme v závislosti od zrýchlenia na úrovni voľného poľa $\{\ddot{r}_b\}$

$$\{F(t)\} = -[M][D]\{\ddot{r}_b\} \quad (4.30)$$

kde $[D]$ je diagonálna matica budenia v smeroch jednotlivých stupňov voľnosti (x, y, z),

Potom po dosadení (4.27) a (4.30) do (4.3) máme rovnicu

$$\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i \{\ddot{Y}\}_i + \{\Phi\}_i^T [C] \{\Phi\}_i \{\dot{Y}\}_i + \{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_i \{Y\}_i = -\{\Phi\}_i^T [M][D]\{\ddot{r}_b\} \quad (4.31)$$

a po úprave

$$\{\ddot{Y}\}_i + 2\xi_i \omega_i \{\dot{Y}\}_i + \omega_i^2 \{Y\}_i = -\gamma_i \{\ddot{r}_b\} \quad (4.32)$$

kde γ_i je súčiniteľ podielu i -teho tvaru na efektívnej modálnej hmote vyjadrený v tvare

$$\gamma_i = \frac{\{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot [D]}{\{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_i} \quad (4.33)$$

Pomerný útlm v rovnici (4.32) uvažujeme v tvare

$$\xi_i = (\alpha / 2\omega_i) + (\beta\omega_i / 2) + \xi + \xi_{mj}, \quad (4.34)$$

kde α je útlm úmerný matici hmotnosti, β je útlm úmerný matici tuhosti, ξ je konštantný pomerný útlm a ξ_{mj} je modálny útlm.

Rovnice (4.32) sa riešia priamou integráciou, v praxi dobre známou ako Duhamelov integrál []. Techniky determinujúce vlastné tvary sústavy a vektory vlastných čísel sú opísané v predchádzajúcej kapitole (kap.4.1). Všetky kritériá na výber vlastných tvarov v prípade modálnej analýzy musia byť splnené na zabezpečenie požiadaviek na presnosť riešenia.

Tab.4.2 Dĺžka časového kroku integrácie ΔT

Metóda	Pomer pre najmenšiu uvažovanú periódu
Houbolt	1/15
Newmark	1/10
Wilson	1/10
Nigam-Jennings	1/5

Časový krok ΔT pre numerickú integráciu musí byť dostatočne malý, aby bola zaručená stabilita a konvergencia riešenia v čase. Za dostatočne malý časový krok sa považuje taký, pri ktorom pre $\Delta T/2$ sa odozva nezmení o viac ako 10%. Pre štandardné metódy obmedzenie dĺžky časového kroku je vyjadrené v tab.4.xx. V prípade riešenia bežných úloh najmenšia perióda nie je menšia ako 0,03s.

4.3 Harmonická analýza

V technickej praxi sa stretávame s prípadmi, keď na konštrukciu pôsobí zaťaženie cyklickými silami s konštantnými amplitúdami a s rovnakou frekvenciou. Harmonickým silám $\{F(t)\}$ pôsobiacim na pružné teleso odpovedajú harmonické posuny $\{r(t)\}$ v tvare

$$\{F(t)\} = \{F_{\max}\} (\cos \psi + i \sin \psi) e^{i\Omega t} = (\{F_1\} + i\{F_2\}) e^{i\Omega t} \quad (4.35)$$

$$\{r(t)\} = \{r_{\max}\} (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i\Omega t} = (\{r_1\} + i\{r_2\}) e^{i\Omega t}$$

Dosadením vzťahov () do pohybových rovníc () dostaneme systém komplexných rovníc v tvare

$$([K] - \Omega^2 [M] + i\Omega [C])(\{r_1\} + i\{r_2\}) = \{F_1\} + i\{F_2\}, \quad (4.36)$$

ktorých riešenie vedie k riešeniu ekvivalentnej statickej úlohy. V prípade riešenia rovníc (4.36) vo frekvenčnej oblasti s krokom $\Delta\Omega$ môžeme na riešenie zvoliť metódu priamej integrácie v čase alebo metódu rozkladu do vlastných tvarov. Amplitúdu posunu a fázový posun pre ľubovoľný globálny k -ty stupeň voľnosti telesa vypočítame zo vzťahu

$$r_{k,\max} = \sqrt{r_{k,1}^2 + r_{k,2}^2} \quad \text{a} \quad \varphi_k = \arctan(r_{k,2}/r_{k,1}) \quad (4.37)$$

Pri harmonickom kmitaní získame vzťah medzi maximálnou výchylkou posunu, rýchlosti a zrýchlenia v závislosti na kruhovej rýchlosti ω

$$\ddot{u}_{\max} = \omega \dot{u}_{\max} = \omega^2 u_{\max} \quad (4.38)$$

4.4 Spektrálna analýza

Spektrálna analýza sa používa pre dva základné typy výpočtu odozvy od budenia v podopretých bodoch sústavy

- deterministická metóda odozvy spektra
- nedeterministická metóda nestacionárneho kmitania

Spektrálna analýza vychádza z lineárneho chovania konštrukcií a z hľadiska charakteru budenia hovoríme o nasledovných typoch odozvy

- jednobodová spektrálna odozva (SPRS-jedno budiace spektrum pre celý model)
- viacbodová spektrálna odozva (MPRS-viac budiacich spektier pre jeden model)
- dynamická návrhová analýza odozvy

Jednobodová spektrálna analýza je jednou z najčastejšie používaných metód výpočtu odozvy od seizmického budenia v základoch v prípade zemetrasenia. Výpočtový model vychádza z predpokladu, že na konštrukciu pôsobia objemové sily rovnajúce sa účinku zrýchlenia na úrovni základov a príslušnej hmotnosti v diskretných bodoch sústavy. Dynamické rovnice (4.3) dostaneme bez uváženia útlmu v tvare

$$[M]\{\ddot{r}\} + [K]\{r\} = -[M][D]\{\ddot{r}_b\}, \quad (4.39)$$

kde $[D]$ je diagonálna matica budenia v smeroch jednotlivých stupňov voľnosti (x, y, z), $\{\ddot{r}_b\}$ je vektor zrýchlenia na úrovni základov konštrukcie v tvare akceleroqramu.

Vektor posunov vo vzťahu (4.39) vyjadríme obdobne ako v (4.27) v závislosti od vlastných vektorov kmitania $\{\Phi\}_i$ a zovšeobecnených súradníc $\{Y(t)\}$ pričom uvažujeme s buđením vektorom zrýchlenia $\{\ddot{u}_g\}$ v jednom smere

$$\{\ddot{Y}\}_i + \omega_i^2 \{Y\}_i = -\{\ddot{u}_b\} \quad (4.40)$$

Celkový vektor zrýchlení na konštrukcii vyjadríme ako súčet vektorov relatívnych zrýchlení $\{\ddot{Y}(t)\}$ (inerciálne zložky) a zrýchlení na úrovni základov $\{\ddot{u}_b(t)\}$ (kinetické zložky)

$$\{\ddot{u}(t)\} = \{\ddot{Y}(t)\} + \{\ddot{u}_b(t)\} \quad (4.41)$$

Dosadením (4.41) do (4.40) dostaneme vzťah

$$\{\ddot{u}(t)\} = \omega^2 \{Y(t)\} \quad (4.42)$$

Zo vzťahu (4.42) vyplýva, že priebeh odozvy zrýchlenia je úmerný priebehu zovšeobecnenej funkcie $\{Y(t)\}$, čo znamená, že aj maximálne výchylky zrýchlenia sú navzájom úmerné.

Veličina na pravej strane rovníc (4.42) sa nazýva spektrum odozvy posunov $S_d(\omega)$ a závisí od periódy T

$$S_d(\omega) = \omega^2 \{Y(\omega)\}_{\max} \quad \text{a} \quad T = 2\pi/\omega \quad (4.43)$$

Spektrálna analýza bezprostredne nadväzuje na modálnu analýzu. Vektor premiestnení $\{r\}_i$ v každom bode získame z vektorov vlastných čísiel $\{\Phi\}_i$ pre i -tu frekvenciu v nasledovnom tvare

$$\{r\}_i = A_i \{\Phi\}_i, \quad (4.44)$$

kde A_i je tvarový súčiniteľ.

Tvarový súčiniteľ A_i závisí od návrhového spektra zrýchlenia v tvare

$$A_i = \frac{S_a(\omega_i) \gamma_i}{\omega_i^2} \quad (4.45)$$

kde $S_a(\omega_i)$ je hodnota návrhového spektra zrýchlenia pre i -tu frekvenciu (v pevných bodoch konštrukcie - základoch) a zvolený útlm. Útlm v spektrálnej analýze sa do výpočtu zavádza cez návrhové hodnoty spektra zrýchlenia.

4.4.1 Spektrum odozvy akcelerácií

V prípade získania akcelerogramu zo záznamu zemetrasenia alebo vygenerovaného umelého akcelerogramu sme postavení pred problém výpočtu spektra zrýchlení z tohto akcelerogramu.

Rovnako aj v prípade výpočtu podlažných spektier zrýchlení sa postupuje rovnako – vypočíta sa odozva v čase a potom spektrá odozvy akcelerácií vo frekvenčnej oblasti.

Vlastnú frekvenciu i -tého oscilátora bez uváženia útlmu definujeme v tvare

$$\omega_i = \sqrt{K_i/M_i} \quad (4.46)$$

Spektrum odozvy sa modeluje ako sústava jednoduchých oscilátorov (obr.4.xx) uložených na pevný základ, ktorému udelíme pohyb totožný so skúmaným akcelerogramom.

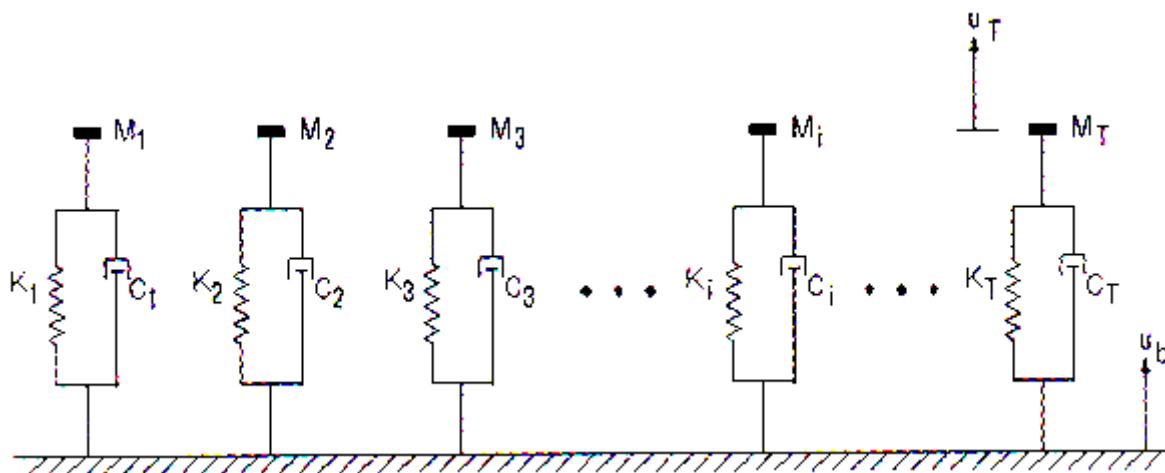
Dynamicкую rovnicu pohybu oscilátora vyjadríme podľa (4.3) v tvare

$$M_i \cdot \ddot{u}_i + C_i \dot{u}_i^r + K_i u_i^r = 0, \quad (4.47)$$

kde u_i^r je relatívny pohyb i -tého oscilátora, pre ktorý platí

$$u_i^r = u_i - u_b, \quad (4.48)$$

kde u_b je premiestnenie pevného základu.



Obr.4.2 Jednoduchá sústava oscilátorov

Pomerný útlm ξ_i pre i -tý tvar je definovaný v tvare

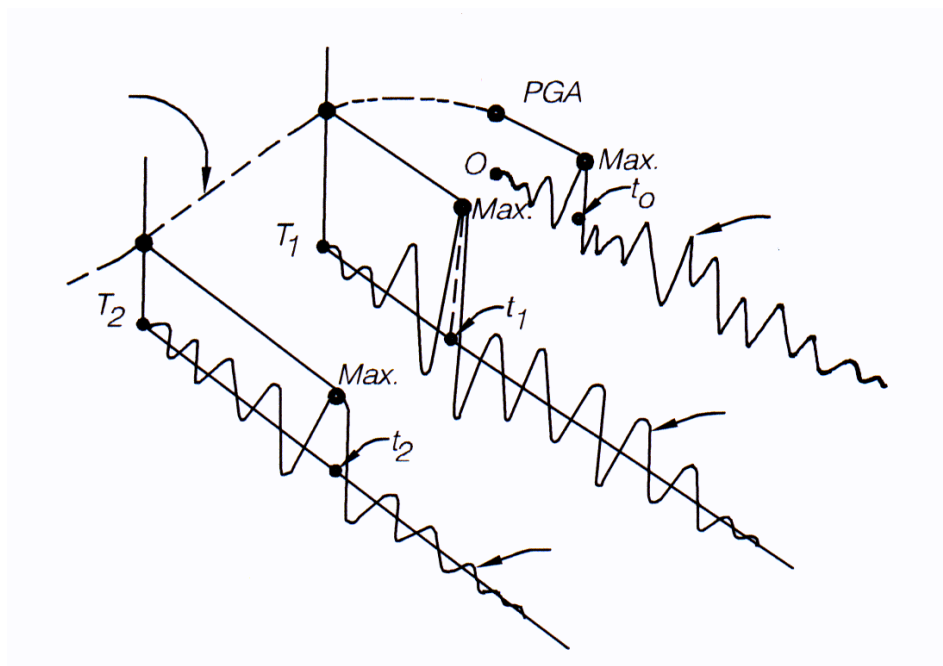
$$\xi_i = C_i/C_{cr,i}, \quad (4.49)$$

kde $C_{cr,i} = 2\sqrt{K_i M_i}$ je súčiniteľ kritického útlmu.

Rovnice (4.47-4.49) vedú k diferenciálnej rovnici

$$\ddot{u}_i^r + 2\xi_i \omega_i \dot{u}_i^r + \omega_i^2 u_i^r = -\ddot{u}_b, \quad (4.50)$$

Riešením dynamických rovníc (4.50) metódami priamej odozvy získame priebeh premiestnení, rýchlostí a zrýchlení v čase pre konkrétnu hodnotu vlastnej kruhovej frekvencie. Maximálna hodnota zrýchlenia v danom časovom úseku je hodnota spektra odozvy zrýchlenia. Takýmto spôsobom pre zadaný akcelerogram, zvolené hodnoty vlastných frekvencií a útlmu získame priebeh spektier odozvy zrýchlení od daného akcelerogramu.



Obr.4.3 Schéma výpočtu spektra akceleroqramu

4.4.2 Metódy modálnej kombinácie

Pre získaný vektor premiestnenia (4.44) zo spektrálnej analýzy pre definované frekvencie a smery budenia získame aj ďalšie charakteristické odozvoové veličiny (sily, napätia,...) na základe štandardných vzťahov medzi premiestneniami a silami.

Spektrum odozvy dostaneme kombináciou odozvoových veličín pre jednotlivé tvary, a to nasledovnými metódami :

- metóda celkovej kvadratickej kombinácie (CQC),
- metóda podoblastí (GRP),
- metóda dvojnásobnej sumy (DSUM),
- metóda odmocniny zo sumy štvorcov (SRSS),
- metóda NRL-SUM (DDAM).

Celkovú odozvu R_a dostaneme kombináciou odoziev pre jednotlivé frekvencie a smery budenia v nasledovnom tvare :

Metóda celkovej kvadratickej kombinácie (CQC)

$$R_a = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k \cdot \varepsilon_{ij} \cdot R_i \cdot R_j \right\}^2, \quad k = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 2 & \text{ak } i \neq j \end{cases}, \quad r = \omega_j / \omega_i, \quad (4.51)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{8(\xi'_i \xi'_j)^{\frac{1}{2}} \cdot (\xi'_i + r \xi'_j) \cdot r^{3/2}}{\left[1 - r^2\right]^2 + 4 \cdot \xi'_i \xi'_j r (1 + r^2) + 4 \cdot (\xi_i'^2 + \xi_j'^2) \cdot r^2}$$

Metóda podoblastí (GRP)

$$R_a = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij} |R_i \cdot R_j| \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } \frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_i} \leq 0.1 \\ 0 & \text{ak } \frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_i} > 0.1 \end{cases} \quad (4.52)$$

Metóda dvojnásobnej sumy (DSUM)

$$R_a = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij} |R_i \cdot R_j| \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_i - \omega_j}{\xi_i'' \omega_i + \xi_j'' \omega_j} \right)^2}, \quad (4.53)$$

kde ω_i'' (ω_j) je tlmená (netlmená) vlastná frekvencia v i -tom tvare, ξ_i'' modifikovaný pomerný útlm.

Metóda odmocniny zo sumy štvorcov (SRSS)

$$R_a = \left[\sum_{i=1}^N (R_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.54)$$

Metóda NRL-SUM (DDAM)

$$R_a = |R_{a1}| + \left[\sum_{i=2}^N R_{ai}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.55)$$

kde R_{a1} je hodnota najväčšieho modálneho premiestnenia, napätia alebo reakcie, R_{ai} je hodnota modálneho premiestnenia, napätia alebo reakcie pre i -tý tvar.

V zmysle odporúčaní noriem sa v praxi najčastejšie používa metóda SRSS. Použitie tejto metódy je však obmedzené podmienkou, aby dve najbližšie vlastné frekvencie konštrukcie sa líšili o viac ako 10%. Pokiaľ táto podmienka nie je splnená musí sa použiť metóda CQC, v ktorej sa neprejavuje lineárna závislosť najbližších vlastných frekvencií.

Pre výpočet odozvy spektrálnou analýzou sa odporúča do výpočtu uvažovať tie tvary postupne, ktoré zaznamenajú prírastok v odozve o viac ako 10%, a to sa overí tromi nasledovnými metódami :

- metódou **energetickej chyby** systému, kde determinovanie použitia vlastnej frekvencie je definované podmienkou

$$E_m \leq 0.05 \left(\sum_{i=1}^m E_i + E_m \right), \quad (4.56)$$

kde E_i je totálna energia pre i -tý tvar a m je počet tvarov zavedených do výpočtu.

- metódou založenou na **kontrole modálnej hmoty**, kedy počet uvažovaných vlastných frekvencií je determinované podmienkou aby celková modálna hmota dosahovala aspoň 90% z celkovej hmoty systému,
- metódou založenou na **overení chyby procedúrou**, v ktorej celková odozva je počítaná pre nasledovné frekvencie pod podmienkou nedosiahnutia konvergencie.

Postačujúcou podmienkou je uvažovať so všetkými vlastnými frekvenciami do hodnoty 33Hz (ZPA frekvencia). Reziduálna hmota (hmota viazaná na pevné body) sa nezapočítava do hmoty, ktorá sa testuje podľa predchádzajúcich odporúčaní.

4.5 Modelovanie útlmu

Maticu proporcionálneho viskózneho útlmu v dynamických rovniciach (4.3) je možné obecné uvažovať v tvare

$$[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K] + \sum_{j=1}^{NMAT} \beta_j [K]_j + \sum_{k=1}^{NMAT} [C]_k + [C]_\xi, \quad (4.57)$$

kde α , β sú konštantné súčinitele globálnych matíc hmotnosti a matice tuhosti odpovedajúce modelu Raylieghovho útlmu, β_j je konštantný súčiniteľ matice tuhosti podľa rôznych typov materiálov, C_k je matica útlmu po prvkoch, C_ξ je frekvenčne závislá matica útlmu, ktorú determinujeme z nasledovných vzťahov

$$\{\Phi\}_i^T [C_\xi] \{\Phi\}_i = 2\xi\omega_i = 4\pi \cdot f_i \cdot \xi, \quad (4.58)$$

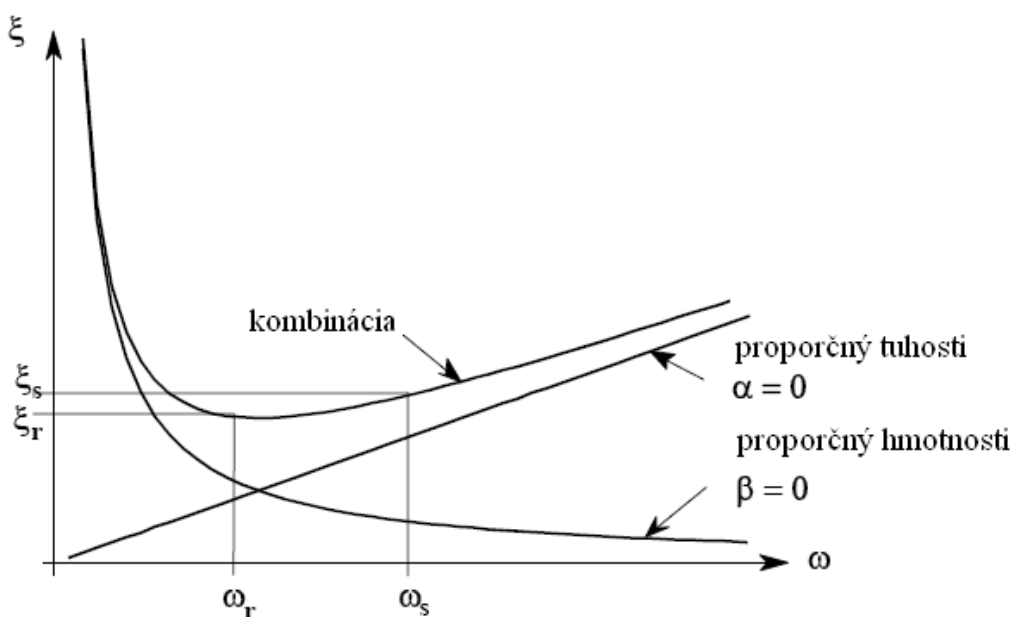
kde ξ je konštantný pomerný útlm, ω_i je vlastná kruhová frekvencia, f_i je frekvencia v intervale medzi f_1 a f_2 (interval rozhodujúcich frekvencií), $\{\Phi\}_i$ je vektor vlastných tvarov odpovedajúci vlastnej frekvencii ω_i relatívneho premiestnenia i -tého vlastného tvaru.

Raylieghov model útlmu vychádza z definovania úmernosti k matici tuhosti a hmotnosti v tvare

$$[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K] \quad (4.59)$$

Po prenasobením rovníc (4.58) vektorom vlastných tvarov $\{\Phi\}_i$ dostaneme

$$\{\Phi\}_i^T [C_\xi] \{\Phi\}_i = \alpha \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i + \beta \{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_i = \alpha + \beta \omega_i^2 = 2\xi \omega_i \quad (4.60)$$



Obr.4.4 Závislosť útlmu na frekvenciách – Rayleighov útlm

Súčiniteľ útlmu pre kruhovú frekvenciu ω_i dostaneme zo vzťahov (4.60) v tvare

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (4.61)$$

Súčinitele α , β určíme zo vzťahu (4.61) pre dve hodnoty charakteristických frekvencií ω_r , ω_s a útlmu v tvare

$$\begin{Bmatrix} \xi_r \\ \xi_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_r & \omega_r \\ 1/\omega_s & \omega_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

V prípade konštantného pomerného útlmu $\xi = \xi_r = \xi_s$ máme

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_r\omega_s}{\omega_r + \omega_s}, \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_r + \omega_s}, \quad (4.63)$$

kde ω_r , ω_s sú minimálna a maximálna kruhová frekvencia ohraničujúce oblasť rozhodujúcich frekvencií konštrukcie. Pre štandardné konštrukcie uvažujeme s proporcionálnym útlmom podľa tab.4.3

Tieto hodnoty sú aplikovateľné pre všetky tvary na celej konštrukcii z toho istého materiálu. V prípade kombinovanej konštrukcie (železobetónová s oceľovou) alebo uvaženia vplyvu podložia je možné zaviesť neproporcionálny útlm. Pre spriahnuté konštrukcie uvažujeme útlm podľa úrovne namáhania 2. S úrovňou namáhania 2 uvažujeme vtedy, keď u viac ako 50% prvkov bolo prekročené medzné namáhanie. Technologické celky a ich kotvenie sa uvažujú podľa úrovne namáhania 1.

Tab.4.3 Hodnoty proporcionálneho útlmu podľa typov konštrukcií

Typ konštrukcie	Proporcionálny útlm	
	úroveň namáhania 1	úroveň namáhania 2
Zvárané hliníkové konštrukcie	2	4
Zvárané oceľové konštrukcie	2	4
Montované oceľ.konstr. s trecími spojmi	2	4
Montované oceľ.konstr. so skrutkovými spojmi	4	7
Predpäté železobetónové konštrukcie	2	5
Železobetónové konštrukcie	4	7
Hodnoty útlmu pre úroveň namáhania 2 sa uvažujú len v odôvodnených prípadoch extrémneho namáhania konštrukcie.		

4.6 Statická kondenzácia a Guyanova redukcia

Redukcia stupňov voľnosti sa v MKP využíva v prípadoch rozsiahlych lineárnych úloh na zvyšovanie efektívnosti výpočtu a zníženie časovej náročnosti na výpočet. Pri statických úlohách sa hovorí o metóde superelementov alebo subkonštrukcií.

Statická kondenzácia vychádza z riešenia rovníc v tvare

$$[K]\{r\} = \{F\} \quad (4.64)$$

Stupne voľnosti redukuje na takzvané hlavné stupne voľnosti (masters) s označením „m“. Vynechané stupne voľnosti sa nazývajú podriadené (slave) s označením „s“. Rovnice (4.64) upravíme nasledovne

$$\begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r_m\} \\ \{r_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_m\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

pričom po roznásobení máme

$$[K_{mm}]\{r_m\} + [K_{ms}]\{r_s\} = \{F_m\} \quad (4.66)$$

$$[K_{sm}]\{r_m\} + [K_{ss}]\{r_s\} = \{F_s\} \quad (4.67)$$

po prenásovení rovnice (4.67) inverznou maticou $[K_{ss}]^{-1}$ si vyjadríme vektor $\{r_s\}$

$$\{r_s\} = [K_{ss}]^{-1} \{F_s\} - [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \{r_m\} \quad (4.68)$$

Dosadením vzťahov (4.68) do (4.66) dostaneme

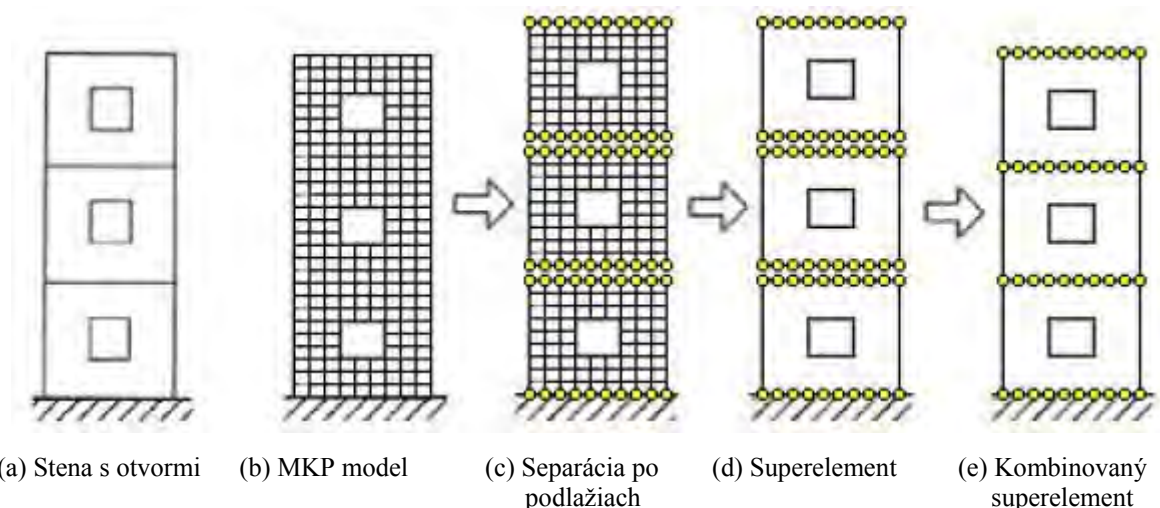
$$[K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{r_m\} = \{F_m\} - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}\{F_s\} \quad (4.69)$$

alebo $[\hat{K}]\{\hat{r}\} = \{\hat{F}\}, \quad (4.70)$

kde $[\hat{K}]$ je matica tuhosti, $\{\hat{F}\}$ je vektor zovšeobecnených síl a $\{\hat{r}\} = \{r_m\}$ je vektor deformačných parametrov superelementu (subkonštrukcie), t.j.

$$[\hat{K}] = [K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}], \quad \{\hat{F}\} = \{F_m\} - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}\{F_s\} \quad (4.71)$$

Statická kondenzácia sa efektívne využíva v MKP pri nosníkových prvkoch aj na uvoľňovanie stupňov voľnosti napr. pri klbových väzbách.



Obr.4.5 Eliminovanie neznámych metódou subkonštrukcií (superelementov)

Dynamická kondenzácia vychádza z riešenia pohybových rovníc (4.3) v tvare

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{F\} \quad (4.72)$$

Kde maticu tuhosti $[\hat{K}]$ a vektor zovšeobecneného zaťaženia $\{\hat{F}\}$ superelementu vyjadríme rovnako ako pri statickej kondenzácii, t.j. podľa vzťahov (4.71). Maticu hmotnosti superelementu $[\hat{M}]$ vyjadríme z Gyuanovej redukcie vychádzajúc zo všeobecného problému vlastných čísiel

$$\{\phi\}^T [K] \{\phi\} = \omega^2 \{\phi\}^T [M] \{\phi\}, \quad (4.73)$$

kde vektor $\{\phi\}$ vyjadríme v závislosti od vektoru neznámych parametrov posunov $\{r\}$ podľa Guyana za predpokladu, že zaťaženie na podriadené stupne voľnosti nepôsobia

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} r_m \\ r_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \end{bmatrix} \{r_m\} = [G] \{r_m\}, \quad (4.74)$$

kde vektor $\{r_s\}$ je vyjadrený zo vzťahu (4.74) pre $\{F_s\} = \{0\}$, t.j. $\{r_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{r_m\}$.

Dosadením vektora $\{\phi\}$ zo vzťahu (4.74) do (4.73) dostaneme maticu hmotnosti superelementu $[\hat{M}]$

$$\begin{aligned} [\hat{M}] &= [G]^T [M] [G] = [M_{mm}] - [K_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [M_{sm}] - [M_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] + \\ &+ [K_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [M_{ss}] [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \end{aligned} \quad (4.75)$$

Obdobným spôsobom odvodíme aj maticu útlmu superelementu $[\hat{C}]$

$$\begin{aligned} [\hat{C}] &= [G]^T [C] [G] = [C_{mm}] - [K_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [C_{sm}] - [C_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] + \\ &+ [K_{ms}] [K_{ss}]^{-1} [C_{ss}] [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \end{aligned} \quad (4.76)$$

Výpočet dynamických rovníc sa v metóde subkonštrukcií robí pre redukovaný počet stupňov voľnosti (masters), čo vedie k značnej úspore strojového času ako aj diskovej pamäte počítača.

7. MODELOVANIE KONŠTRUKCIÍ

7.1 Výpočtové modely a systém riadenia kvality

Vychádzajúc z investičného zámeru a základnej koncepcie architekta je úlohou projektanta-statika (viď schému 2.1 a 2.2) navrhnuť **koncepciu nosného systému** na základe poznania lokality, kde bude objekt osadený. Každý objekt je vystavený geofyzikálnym vplyvom (gravitačné, meteorologické a seizmické zaťaženie) charakteristickým pre danú lokalitu. Geologický profil lokality a fyzikálno-mechanické charakteristiky zemín determinujú celkovú hmotnosť objektu a typ a tvar základovej konštrukcie. Správne vyhodnotenie **geofyzikálnych charakteristík lokality** je teda základom úspešnej realizácie projektu nosných konštrukcií stavieb. Pri hľadaní optimálnej koncepcie nosného systému sa projektant-statik musí zaoberať vzájomným spolupôsobením sústavy konštrukcia-základ-podložie a na základe vlastných skúseností, poznatkov z odbornej literatúry a analýz rôznych variant nosného systému na výpočtových modeloch vyhodnotiť efektívnosť zvoleného systému a mieru vplyvu jednotlivých súčastí na odolnosť a spoľahlivosť daného objektu odpovedajúcej požiadavkám národných štandardov.

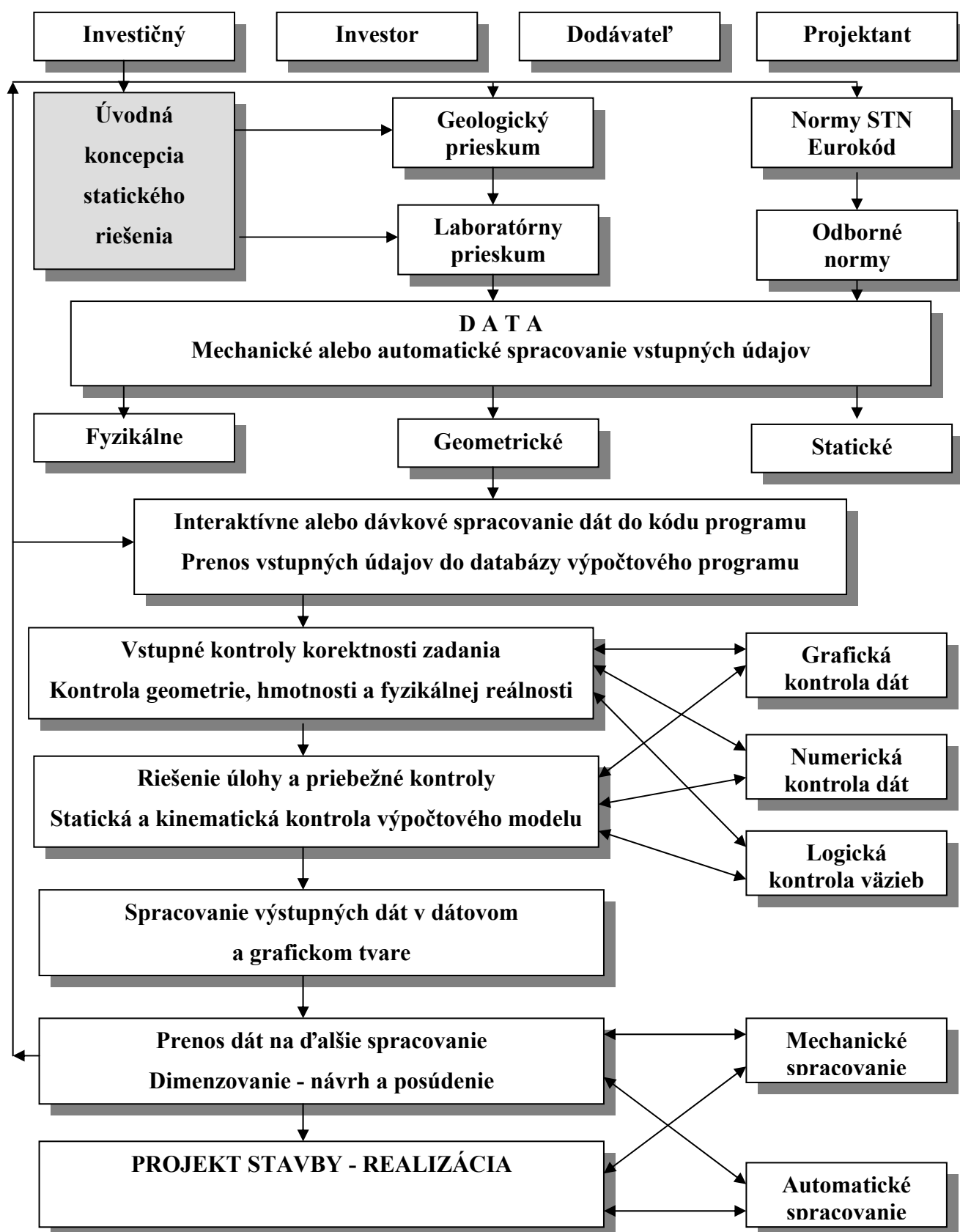
Zvolený výpočtový model považujeme za **efektívny**, ak vystihuje rozhodujúce vplyvy okolia na sústavu konštrukcia-základ-podložie a ich vzájomné spolupôsobenie.

Správnou interpretáciou fyzikálno-mechanických charakteristík zemín sa vytvorí **výpočtový model podložia**. Vzhľadom k tomu, že vstupné parametre z geologického prieskumu sa pohybujú v určitom intervale je najvhodnejšie v prípade viacpodlažných a náročných objektov uvažovať s krajnými hodnotami a zistiť citlivosť nosného systému na daný interval tuhostných parametrov podložia. Vyšetrovanie citlivosti navrhovanej konštrukcie na variabilné vlastnosti zemín (experimentálne potvrdených) má osobitný význam v prípade dynamického namáhania sústav. Pokiaľ sa výpočtom preukáže vysoká citlivosť nosného systému, je potrebné prijsť k modifikácii koncepcie nosného systému - vo väčšine prípadov sa jedná o vhodnú voľbu základových konštrukcií.

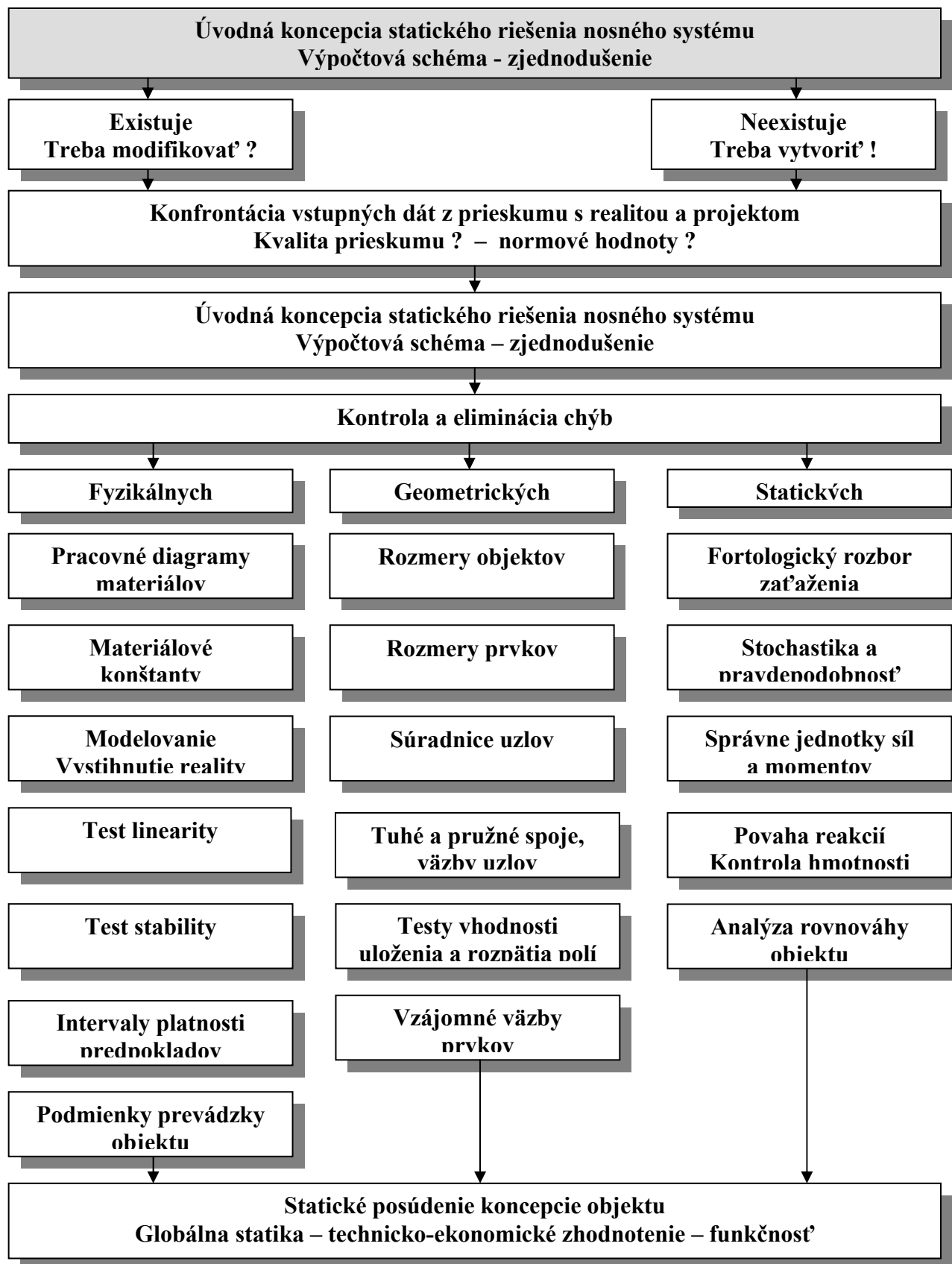
V ďalšom procese sa pozornosť statika sústreďuje na zostavenie efektívneho **výpočtového modelu hornej konštrukcie**. V prípade použitia metódy konečných prvkov, pri rozsiahlejších objektoch, je potrebné spracovať množstvo vstupných dát (fyzikálnych, geometrických a statických). Táto fáza prípravy výpočtového modelu je najdôležitejšia a s podrobnosťou výpočtového modelu narastá aj náročnosť na overenie jeho kvality.

S počtom prvkov narastá pravdepodobnosť výskytu chyby nielen v procese prípravy modelu, ale aj v procese realizácie výpočtov a vyhodnocovania výsledkov výpočtov. Podcenením prípravy dát a ich priebežného overovania narastajú náklady niekoľkonásobným opakovaním výpočtov.

Hlavné zdroje chýb statika sú schématicky znázornené na obr.3.2. Moderné programy poskytujú silné prostriedky pre kontrolu dát výpočtového modelu.



Obr.7.1 Schéma úloh projektanta-statika v procese projektovej činnosti



Obr.7.2 Hlavné zdroje chyby projektanta-statika v procese výpočtu v MKP

V systéme ANSYS (ako aj v mnohých ďalších moderných výpočtových programoch) je k dispozícii niekoľko prostriedkov na overenie správnosti zadáných vstupných a spracovaných výstupných dát. Z hľadiska spôsobu overenia vstupných dát hovoríme o kontrole – **grafickej, numerickej a logickej**.

Fyzikálne a geometrické charakteristiky prvkov, ich vzájomných väzieb, okrajových podmienok, ako aj zaťaženia je možné kontrolovať **graficky** (z obrazovky) alebo **numericke** (z dátových súborov). **Logická kontrola** pozostáva z kontroly vzájomných väzieb jednotlivých vstupných aj výstupných dát a realizuje sa **mechanicky** alebo **automaticky**. Mechanickú kontrolu vykonáva samotný programátor -statik, a to vyhodnocovaním priebežných výsledkov od testovacieho zaťaženia na vyselektovaných častiach modelu, ako aj na celom modeli a porovnaním výsledkov so zjednodušenými výpočtami. Automatická kontrola je realizovaná samotným programom a ten počas jednotlivých fáz spracovania vstupných a výstupných dát upozorňuje na možné chyby oznamami na úrovni poznámok, varovaní a chybových hlásení.

Významné projektové organizácie majú spracovaný **program kvality** v zmysle požiadaviek ISO 9001, ktorý v oblasti statických výpočtov jednoznačne definuje systém kontroly použitých výpočtových modelov a prostriedkov. Program kvality je založený na princípe nezávislosti a systematičnosti. Výpočtové procesy sú rozdelené do jednotlivých fáz (obr.2.1 a 2.2) a k nasledujúcej fáze sa prikróčí po overení správnosti preberaných dát z predchádzajúcej fázy. V oblasti statických výpočtov s využitím MKP hovoríme o kontrole vstupných a výstupných dát.

1. Kontrola vstupných dát :

Pod **grafickou** kontrolou vstupných dát rozumieme

- farebné rozlíšenie jednotlivých typov prvkov, geometrických a materiálových charakteristík, lokálnych súradnicových systémov
- proporcionálne zobrazenie rozmerov prvkov a ich zaťaženia
- symbolické zobrazenie okrajových podmienok a vzájomných väzieb prvkov

Pod **numericou** kontrolou vstupných dát rozumieme

- kontrolu listingu jednotlivých skupín vstupných dát (súradnice uzlov, kódové čísla, geometrické a fyzikálne charakteristiky)
- kontrola listingu zaťaženia
- numericke rozlíšenie jednotlivých typov prvkov, geometrických a materiálových charakteristík, lokálnych súradnicových systémov

Pod **logickou** kontrolou vstupných dát rozumieme

- kontrola vstupných dát z hľadiska ich správnej fyzikálnej interpretácie
- kontrola celkovej hmotnosti modelu, stredu hmotnosti a hmotných zotrvačností modelu a stredu tuhosti

2. Kontrola výstupných dát :

Pod **grafickou** kontrolou výstupných dát rozumieme

- farebné rozlíšenie priebehu vnútorných síl (izočiary a izoplochy)
- zobrazenie deformovaného tvaru modelu
- symbolické zobrazenie reakcií a hlavných smerov napätí

Pod **numerickou** kontrolou výstupných dát rozumieme

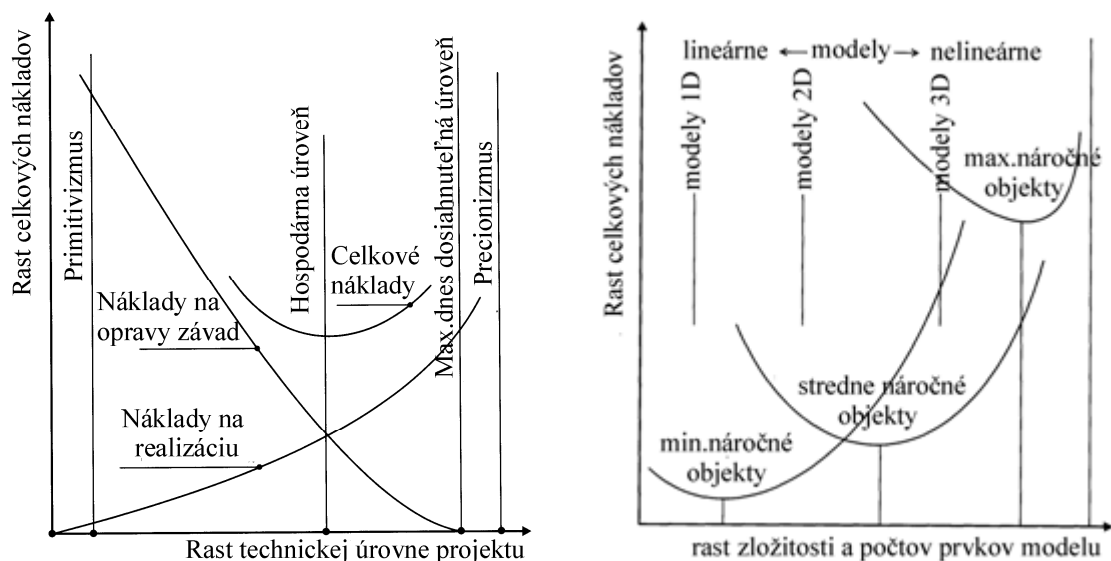
- kontrola listingu premiestnení
- kontrola listingu deformácií a napätí
- kontrola síl a reakcií

Pod **logickou** kontrolou výstupných dát rozumieme

- kontrola výstupných dát z hľadiska ich správnej fyzikálnej interpretácie (proporčnosť, znamienková orientácia, fyzikálne jednotky,...)
- kontrola rovnováhy síl od zaťaženia a hmotnosti s reakciami
- kontrola kombinácie jednotlivých zaťažovacích stavov a ich interpretácie
- kontrola deformácií porovnaním so zjednodušeným riešením

7.2 Zásady modelovania konečnými prvkami

Metódu konečných prvkov (MKP) nemôžeme chápať len ako čisto matematický problém, ale do úvahy musíme brať aj inžiniersky pohľad (praktickú skúsenosť). Inžiniersky pohľad na problém sa výrazne presadzuje pri modelovaní konštrukcií, kedy je potrebné rozhodnúť sa či celú konštrukciu alebo jej časť budeme modelovať s uvážením 1D, 2D alebo 3D stavu napätosti a deformácie. Pre voľbu efektívneho modelu neexistuje jednoznačný návod a najčastejšie sa používa rozhodnutie inžiniera-statika na základe jeho znalosti problematiky a doterajších skúseností ("statického citu") z ohodnotenia podielu toho ktorého vplyvu na namáhanie vyšetrovanej konštrukcie.



Obr.7.3 Schematické znázornenie závislosti nákladov na technickej úrovni projektu

Pojem **efektívneho modelu MKP** zahrňuje v sebe modelovanie fyzikálnych javov prebiehajúcich v konštrukcii, výber dimenzie výpočtovej schémy nD, voľba druhu konečných prvkov vrátane stupňa polynómu p a hustoty delenia h, vyjadrenia statických a geometrických podmienok (zaťaženia a uloženia), interakcie so susednými objektmi, podloží a zemným prostredím, zváženia ako sa budú výstupy interpretovať v projekcii (napätia alebo intenzity síl). Záujem angažovaných subjektov v procese projektovania a realizácie stavby môže byť často protichodný a presadenie jedného či druhého záujmu nemusí byť v prospech samotnej stavby – jej bezpečnosti a efektívnosti. V súčasnej dobe jedným z rozhodujúcich kritérií je **ekonomická výhodnosť** v celom procese od návrhu stavby cez jej realizáciu až po jej prevádzku počas celej doby životnosti.

Dobrý prehľad o vzájomnom vzťahu nákladov na projekt, realizáciu a prevádzku objektu v závislosti na technickej úrovni projektu a náročnosti stavby vidieť na obr.2.3a,b.

Rozvojom MKP sa z výpočtov postupne vytrácal "**primitivizmus**", prakticismus založený na hrubom odhade a vývoj smeruje k "**precisionizmu**", čo je v súčasnosti maximálne dosiahnuteľná technická úroveň riešenia objektu. Obidva extrémny sú škodlivé, pretože znamenajú nárast celkových nákladov na realizáciu technického objektu. Pri podcenení projektovej prípravy môžu náklady na opravu väd niekoľkonásobne predražiť objekt a zas na druhej strane pri prehnane podrobnom modelovaní objektu s množstvom prvkov neúmerne narastajú náklady na návrh objektu. Výber optimálneho modelu teda priamo súvisí so **skúsenosťami** projektanta, s jeho **úrovňou poznania** fyzikálnej podstaty javu, so **schopnosťou** oddeliť podstatné od nepodstatných vplyvov na riešenie konštrukciu.

Jedným z najdôležitejších momentov pri tvorbe výpočtového modelu je vhodný výber prvkov, ich proporcií a ich vzájomných väzieb.

Diskretizácia konštrukcie na prvky rozhodnou mierou ovplyvňuje **presnosť** výpočtu. Zväčšovanie hustoty delenia má do určitej hranice priaznivý vplyv na presnosť výpočtu. Na druhej strane príliš veľká hustota delenia na prvky môže pri rozsiahlych konštrukciách spôsobiť numerickú nestabilitu pri riešení veľkého systému rovníc. **Optimálna hustota delenia** závisí od aproximačného polynómu, geometrického tvaru konštrukcie, zmeny mechanických vlastností a okrajových podmienok.

Prvky treba **zahustiť** predovšetkým v oblastiach náhlych zmien prierezových charakteristík alebo fyzikálnych vlastností, prípadne v miestach koncentrácie napätí. Prechod z hustého delenia na redšie musí byť plynulý, aby nevznikali spoločné uzly malých a veľkých prvkov. Viacerí autori odporúčajú, aby pomer rozmerov dvoch susedných prvkov nepresahoval pomer 2:1. V prípade trojuholníkových prvkov sa odporúča používať prvky s minimálnou veľkosťou uhla 30° .

Z hľadiska matematického je možné tvrdiť, že zjemňovaním delenia narastá presnosť riešenia danej úlohy. Avšak tento proces má svoje obmedzenie. Pri prekročení určitej hranice začne rásť numerická chyba riešenia a proces zhust'ovania delenia sa stáva kontraproduktívny. Určenie tejto hranice nie je jednoduché a jednoznačné, ale súvisí s proporciami rozmeru daného prvku.

Pre základnú orientáciu, determinovanie veľkosti prvkov, resp. jeho základných proporcií vychádza z podmienky **splnenia geometrických a fyzikálnych predpokladov**, z ktorých sa vychádza pri definovaní základných rovníc rovnováhy síl a spojitosti deformácií na danom prvku. Pre lepšiu orientáciu uvádzame v tabuľke 2.1 klasifikáciu základných prvkov z pohľadu mechaniky konštrukcií.

Tab.7.1

Konštrukčný prvok		Odporúčaný pomer
Doska -	Hrubá	$1 : 10 < t : L < 1 : 5$
	Stredná	$t : L = 1 : 5$
	Tenká	$1 : 50 < t : L < 1 : 10$
Membrána -		$1 : 80 < t : L < 1 : 50$
Stena -		$1 : 1 < H : L < 1 : 5$
		$1 : 50 < t : L < 1 : 5$
Nosník -		$1 : 25 < H : L < 1 : 4$

*) t - hrúbka prvku, H - 1. charakteristický rozmer (výška), L - 2. charakteristický rozmer (dĺžka)

Okruh problémov podľa jednotlivých typov modelov:

Modely 1D

- Vplyv priečného šmyku a **skosenia** (viď dodatok A) - u krátkych nosníkov, resp. u nosníkov s vysokým prierezom zanedbanie šmykovej deformácie môže spôsobiť chybu vo výpočte deformácií o viac ako 30%.
- Vplyv **koncentrácie napätí** – neovplyvňuje rozloženie síl na 1D prvku. Koncentrácia napätí sa podľa Saint Venantovho princípu stratí vo vzdialenosti $k \cdot h$ ($k=2$ pre bežné prúty, $k=4$ pre tenkostenné prúty), kde h je charakteristický rozmer. Koncentráciu napätí je teda potrebné vyšetrovať na zložitejšom modeli ako je 1D.
- **Excentricita** pripojenia nosníkov – nesmie sa zanedbať v pozdĺžnom (resp. priečnom) smere v prípade výrazných hodnôt priečných (resp. osových) síl. V opačnom prípade sa posudzuje únosnosť prúta na nereálne hodnoty vnútorných síl.
- **Netuhé spoje** – predstavujú prípad namáhania nosných prvkov medzi dvomi stavmi – kĺbovým a tuhým spojom. Napr. v prípade skrutkového spoja jeho uváženie ako kĺbovej (resp. tuhej) väzby je na strane bezpečnosti pri posudzovaní stužidiel (resp. spojov), ale nedáva reálne hodnoty na posúdenie namáhania samotného spoja (resp. stužidla). Pri presnejších výpočtoch je možné modelovať skrutkový spoj ako pružný s použitím pružinových prvkov (pre spoj medzi nosníkom a stĺpom) s tuhosťou odpovedajúcou tuhosti spoja.

Modely 2D

- **Membránový a ohybový** stav napätosti – pre stenové (resp. doskové) konštrukcie je vo väčšine prípadov rozhodujúce namáhanie membránovým (resp. ohybovým) stavom napätosti. V zvláštnych prípadoch (napr. namáhanie stien v smere kolmom na rovinu steny od tlaku tekutín) je potrebné uvažovať s kombinovaným namáhaním – s použitím škupinových prvkov.
- **Singularita zaťaženia** a zložitá konfigurácia podpier – nedá sa presne vystihnúť v teórii ohybu dosiek.
- **Rohová singularita** – je nedostatočne vyjadrená v teórii ohybu dosiek. Takéto prípady v prípade potreby je potrebné vyšetrovať na 3D modeloch.
- **Hríbové dosky** – je možné riešiť doskovými prvkami s tým, že lokálne namáhanie hlavíc je potrebné posúdiť na 3D modeli.
- **Dosko-stenové komôrkové mostné** konštrukcie – je nutné riešiť s doskostenovými (resp. škupinovými) prvkami, s tým, že po výške prierezu je potrebné použiť prvok s vyššou

presnosťou (s lineárnym alebo parabolickým priebehom napätí) alebo viac prvkov s nižšou presnosťou (s konštantným priebehom napätí).

Modely 3D

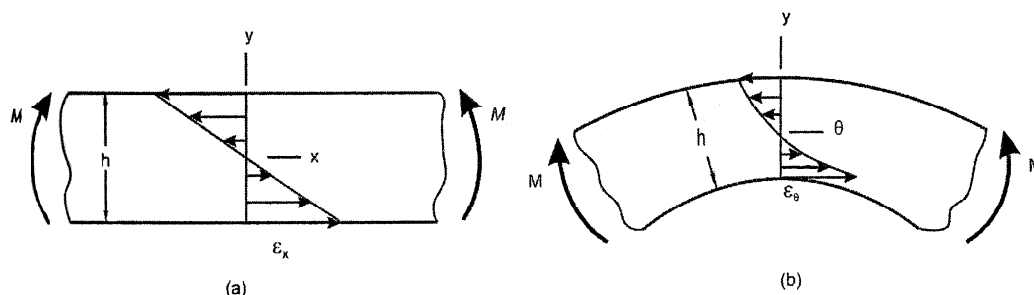
- ☛ **Kombinácia** 1D a 2D prvkov – používa sa pri riešení priestorových konštrukcií. Tu však je potrebné zvážiť modelovanie styku 1D a 2D prvku. Platí zásada, že spojenie dvoch prvkov s výrazne rozdielnou tuhosťou dáva nepresné výsledky pre vyjadrenie namáhania prvku s menšou tuhosťou, resp. nepresné hodnoty síl v mieste kontaktu. Platí zásada spájania prvkov s proporčnými rozmermi, resp. tuhosťami (s pomerom do 1:2).
- ☛ **Priestorový stav napätosti** - dáva podrobné výsledky v namáhaní konštrukcií pri podrobnom delení, avšak takéto riešenia sú pre rozsiahle konštrukcie prevažne "drahé".

7.3 Modelovanie inžinierskych úloh

Modelovanie v MKP je založené na predpoklade dobrého odhadu zohľadnenia vplyvu vonkajšieho prostredia, geometrie konštrukcie a chovania sa materiálu konštrukcie počas predpokladanej doby jej životnosti. Základným predpokladom zostavenia optimálneho konečno-prvkového modelu konštrukcie je, aby projektant – dizajnér mal skúsenosti, resp. správny odhad chovania sa jednotlivých častí konštrukcie pri danom namáhaní, musí vedieť rozlíšiť podstatné od nepodstatného a musí na zjednodušených modeloch vedieť overiť správnosť výsledkov analýzy. Na druhej strane projektant – dizajnér musí poznať možnosti konečno-prvkového programu, jej knižnicu prvkov a teoretické predpoklady (základné rovnice, aproximačné funkcie, materiálové modely,...) pre tvorbu daného prvku, resp. obmedzujúce podmienky použitia daných prvkov. Bez poznania základných princípov teórie MKP a zjednodušujúcich predpokladov teórie tvorby prvkov je možné, že vytvorený výpočtový model nebude vystihovať skutočné chovanie konštrukcie, resp. budú podcenené niektoré podstatné vplyvy okolia na danú konštrukciu. Návrh konštrukcie vychádzajúci z výsledkov analýz na takomto nedokonalom modeli môže viesť k chybným záverom, čo v konečnom dôsledku môže mať vážne dôsledky z hľadiska ekonomických strát alebo strát na životoch ľudí.

Na príklade čistého ohybu priameho a zakriveného nosníka (obr.7.2) si ilustrujeme vhodnosť, resp. nevhodnosť diskretizácie oblasti na konečné prvky. Priebeh posunov a pomerných deformácií je po výške priameho nosníka lineárny (obr.7.2a). Nosníkový prvok je

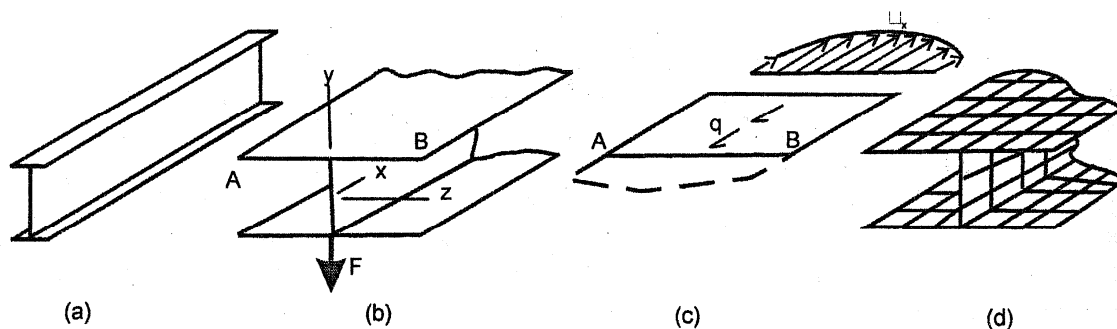
vhodný na riešenie priameho prúta, ale pri zakrivenom prúte sa dopúšťame chyby z hľadiska vystihnúť priebehu pomerných deformácií pozdĺž osi y .



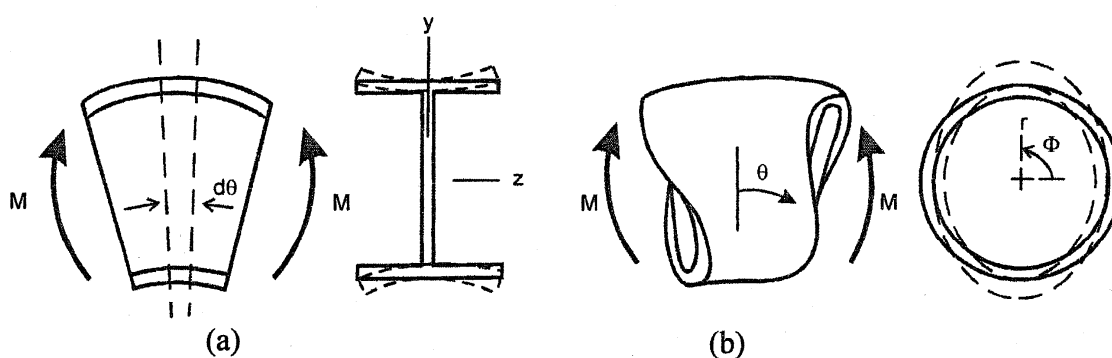
Obr.7.2. Čistý ohyb nosníka

V prípade, že chceme na riešenie stavu napätosti a deformácií použiť rovinné prvky, nestačí použiť jeden prvok s lineárnou aproximáciou a teda s konštantným poľom deformácií na prvku. Ak použijeme dva prvky po výške, chyba vo výpočte maximálneho pretvorenia môže dosahovať až 50%. Štyri prvky po výške je dostatočná aproximácia. Prvok s kvadratickou aproximáciou je nevhodný na riešenie, pretože priebeh posunov po hrane prvku je kvadratický, čo neodpovedá realite. Ak je nosník zakrivený (obr.7.2b), obvodová pomerná deformácia ε_θ sa nemení lineárne v smere osi Y , ale kvadraticky. V tomto prípade je vhodné použiť prvky s kvadratickým polynómom a minimálne štyri po výške.

Uvažujme teraz so štandardným nosníkom z valcovaného profilu I (obr.7.3a), na ktorom od priečného rovnomerného zaťaženia vznikajú nielen ohybové momenty, ale aj priečne sily. Zjednodušenému riešeniu nosníka odpovedá teória tenkostenných konštrukcií. Ohybová tuhosť nosníka je dostatočne presná za predpokladu $h/l \leq 1/10$, avšak šmyková tuhosť je riešená približne zavedením efektívnej šmykovej plochy v závislosti od tvaru prierezu (viď dodatok A). V skutočnosti je priebeh šmykových napätí po výške (po častiach) parabolický avšak v teórii tenkostenných nosníkov je uvažovaný ako konštantný. Presnejšie riešenie u vyšších nosníkoch ($h/l > 1/10$) dosiahneme použitím rovinných prvkov s dodržaním zásad uvedených skôr. Ak uvažujeme zakrivený nosník (obr. 7.4a) s prierezom v tvare I, jeho pásnice sa deformujú radiálne pri pôsobení ohybového momentu. Toto zakrivenie vystihneme len s využitím škrupinových prvkov, t.j. prvkov s membránovou aj ohybovou tuhosťou.



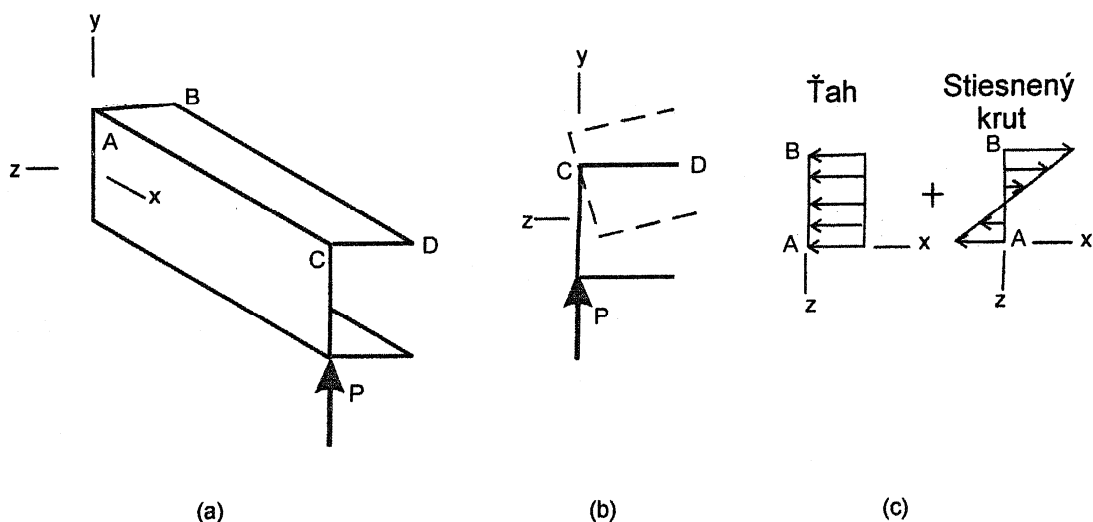
Obr. 7.3. (a) štandardný valcovaný profil, (b) nosník s veľmi širokou pásnicou (c) axiálna deformácia a napätia v hornej pásnici (d) MKP model.



Obr. 7.4. (a) Zakrivený tenkostenný nosník zaťažený ohybom. (b) Ohyb tenkostennej rúrky. Čiarkovaná čiara ukazuje deformácie v rovine prierezu.

Uvažujeme teraz ohyb tenkostennej rúrky podobne ako u zakriveného nosníka s I prierezom. Pri pôsobení momentu M pôvodne kruhový prierez nadobudne oválny tvar (obr. 7.4b). Výsledné ohybové napätie v smere Φ môže mať väčšiu hodnotu ako napätie v smere θ . Ohyb rúrky je vhodne modelovať nosníkovými trubkovými (pipe element) prvkami s korekčnými faktormi. Adekvátny je aj model zo škrupinových prvkov, hoci výpočtový model môže mať veľa stupňov voľnosti.

Ak priečne zaťaženie nosníka prechádza stredom šmyku, tak nosník je namáhaný len ohybom, v opačnom prípade je potrebné uvažovať aj s vplyvom krútenia. V prípade tenkostenných nosníkov s otvoreným prierezom sa hovorí o voľnom krútení a pri prierezoch uzavretých o viazanom krútení. Na obr.7.5 je uvedený prípad tenkostenného nosníka s prierezom U, pričom zaťaženie silou P neprechádza stredom šmyku. V dôsledku krútenia vzniká na nosníku šmykové napätie.



Obr. 7.5. (a) Tenkostenný nosník zaťažený silou P v rovine stojiny. (b) Zmena polohy prierezu na konci nosníka - čiarkovaná čiara, (c) kvalitatívne príspevky od axiálneho napätia σ_x v hornej pásnici na strane uchytenia, pohľad kolmo na hornú pásnicu

To spôsobuje tzv. deplanáciu (zbortenie prierezu), čo má za následok vznik axiálnych posunutí, takže pôvodne rovinné prierezy nezostávajú rovinné. V mieste votknutia nosníka $x=0$ je zamedzené deplanácii, čo má za následok vznik axiálnych napätí. Štandardné nosníkové prvky so šiestimi stupňami voľnosti v uzle tento efekt nevystihujú. Pre vystihnutie týchto efektov je najvhodnejšie použiť škrupinové prvky s dostatočnou hustotou delenia po priereze (ako bolo uvedené skôr).

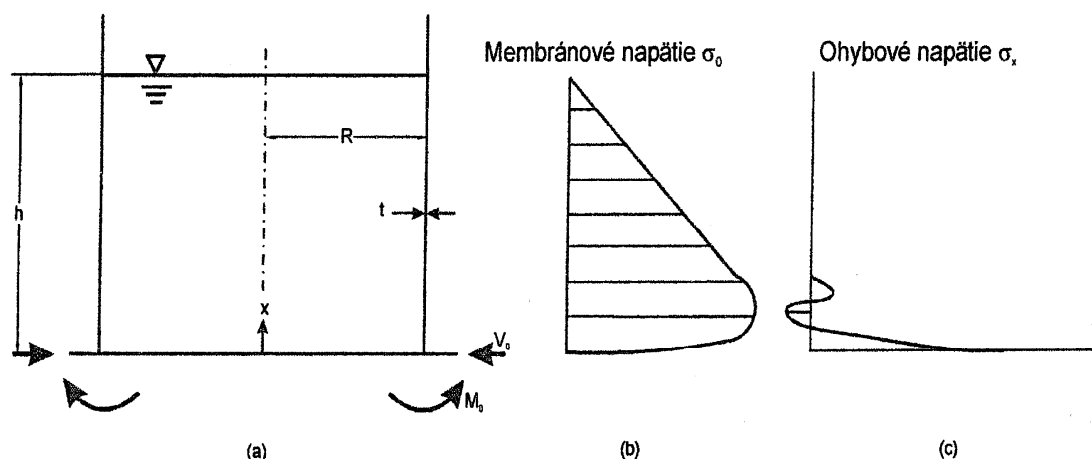
V praxi sa často stretávame s riešením železobetónových trámových stropov, oceľobetónových spriahnutých stropov alebo predpätých stropných panelov typu T alebo TT.. V týchto prípadoch je nevyhnutné uvažovať s excentrickým vyložením nosníkov vzhľadom k železobetónovej doske. Tieto konštrukcie je možné riešiť kombináciou škrupinových a nosníkových prvkov (obr.....a) alebo len samotných škrupinových prvkov (obr.....b).

Obr.7.6 Modelovanie železobetónového trámového stropu a) škrupinovými prvkami alebo škrupinovými a nosníkovými prvkami b) s excentricitou a c) bez excentricity

Styk železobetónového stĺpa so železobetónovou doskou na viacposchodových budovách je veľakrát rovnako problémom pre projektantov. V praxi sa stropné dosky modelujú škrupinovými prvkami a stĺpy nosníkovými prvkami. Na takomto modeli je dôležité dodržiavať hustotu delenia škrupinových prvkov úmernú pôdorysným rozmerom stĺpa v okolí spoločného uzla, ktoré sa môže narastať smerom od stĺpa nanajvyš v dvojnásobku tohto základného rozmeru.

Obr.7.7 Modelovanie styku železobetónového stropu a stĺpu (a) škrupinovými a nosníkovými prvkami s fiktívnymi pružinami alebo (b) s tuhými ramenami

V niektorých literatúrach sa odporúča inžiniersky prístup a styk stĺpa so stropnou doskou modelovať pridaním fiktívnych pružín s ekvivalentnou tuhosťou v hlave stĺpa, ktoré zabezpečia redistribúciu síl z uzla styku (2D prvok a 1D nosníkový prvok) do susedných uzlov dosky. V programe ANSYS je možné využiť profesionálny prístup a prenos síl v hlave stĺpa do susedných uzlov plošného prvku zabezpečiť zavedením tzv. tuhých ramien (väzieb typu CE -). prenos síl uje sústavou



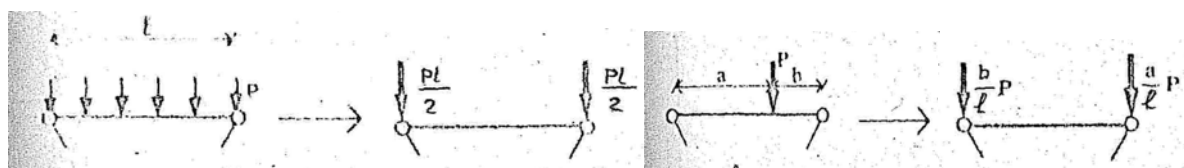
Obr. 7.8 Valcová nádoba naplnená vodou do výšky h

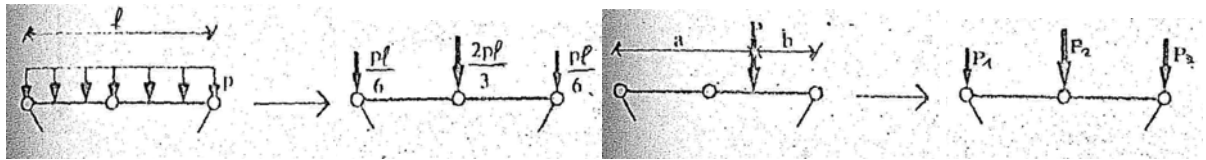
(a) Obvodové membránové napätie. (b) Pozdĺžne ohybové napätie.

V prípade hrubostennej valcovej nádrže uloženej na pevnom základe (obr. 7.6) sa stretávame s problémom vystihnúť priebehov ohybového napätia pri päte nádrže (obr. 7.6c). S využitím škrupinových prvkov s dostatočným zhustením delenia pri päte valcovej nádrže tieto efekty môžeme dostatočne presne riešiť.

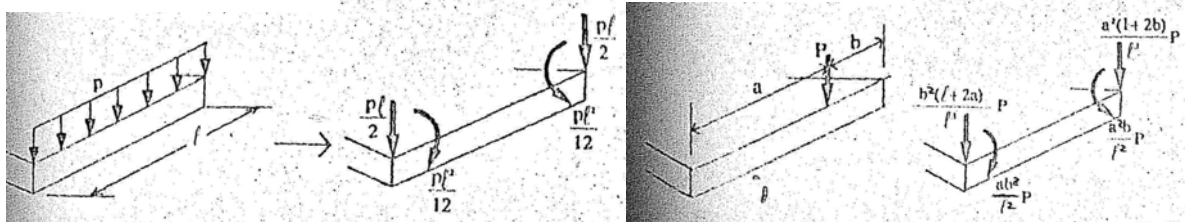
7.4 Zaťaženie na konečných prvkoch

V metóde konečných prvkov je vektor zovšeobecneného zaťaženia od objemových a povrchových síl pôsobiacich na prvok ovplyvnený tvarovými funkciami prvku použitými na aproximáciu posunov na prvku (.....). Preto projektant musí poznať typ prvku a tvar aproximačných funkcií na prvku predtým ako definuje zaťaženie na danom výpočtovom modeli. Singulárne sily sa zvyčajne zavádzajú priamo do uzlov delenia, avšak vzhľadom k charakteru konečných prvkov ich účinok je v podstate rozmazaný po prvku vo váhe tvarových funkcií na prvku. V praxi sa však singulárne sily nevyskytujú, vždy sa jedná o účinok vonkajšieho prostredia alebo telesa na iné teleso na malej ploche konečných rozmerov. Tieto fakty je potrebné poznať pred vytvorením modelu a náležite prispôbiť delenie oblasti v okolí koncentrovaného zaťaženia. Na obr.7.9 sú zobrazené základné vzťahy medzi uzlovými silami a povrchovom zaťažením na prvkoch s lineárnou a kvadratickou aproximáciou.

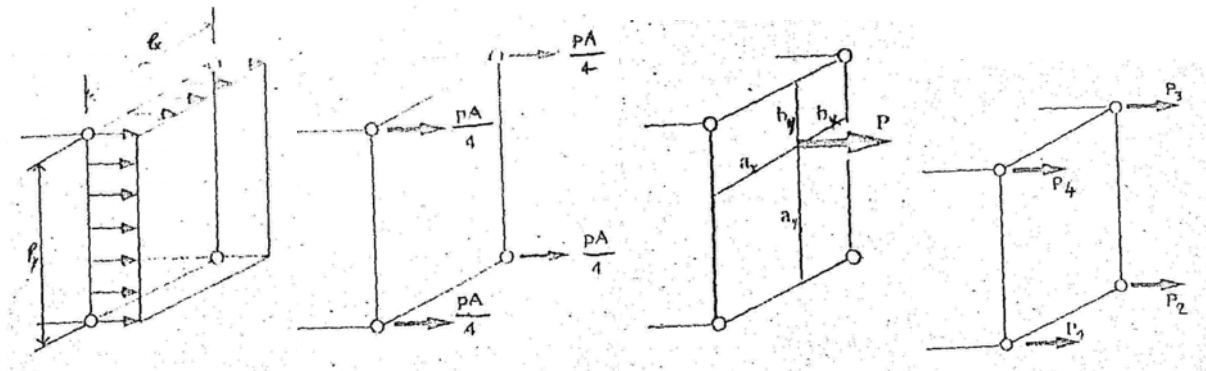




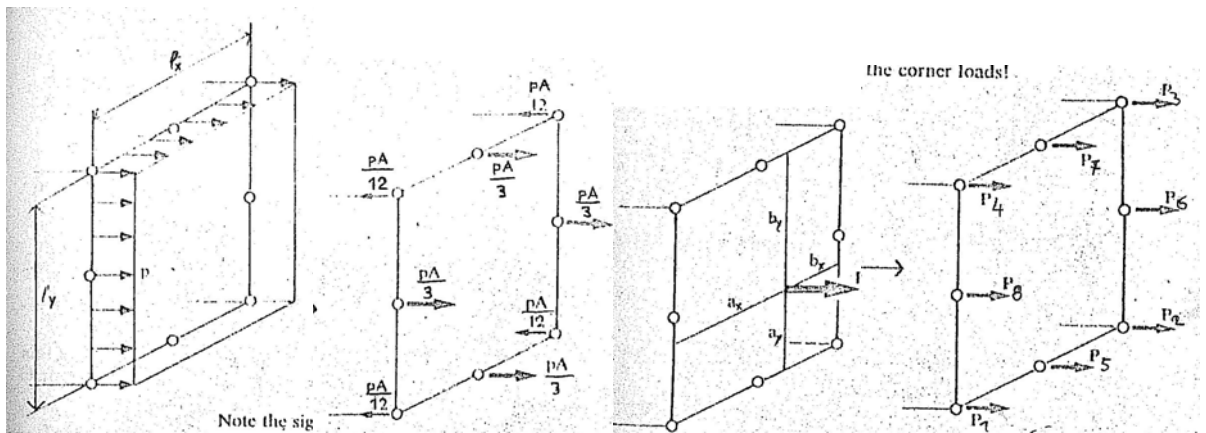
$$F_1 = F \frac{b(b-a)}{l^2}, \quad F_2 = F \frac{4ab}{l^2}, \quad F_3 = F \frac{a(a-b)}{l^2}$$



$$F_1 = F \frac{b^2(l+2a)}{l^3}, \quad F_2 = F \frac{a^2(l+2b)}{l^3}, \quad M_1 = F \frac{ab^2}{l^2}, \quad M_2 = F \frac{a^2b}{l^2}$$



$$F_1 = F \frac{a_x a_y}{A}, \quad F_2 = F \frac{a_y b_x}{A}, \quad F_3 = F \frac{b_x b_y}{A}, \quad F_4 = F \frac{a_x b_y}{A},$$

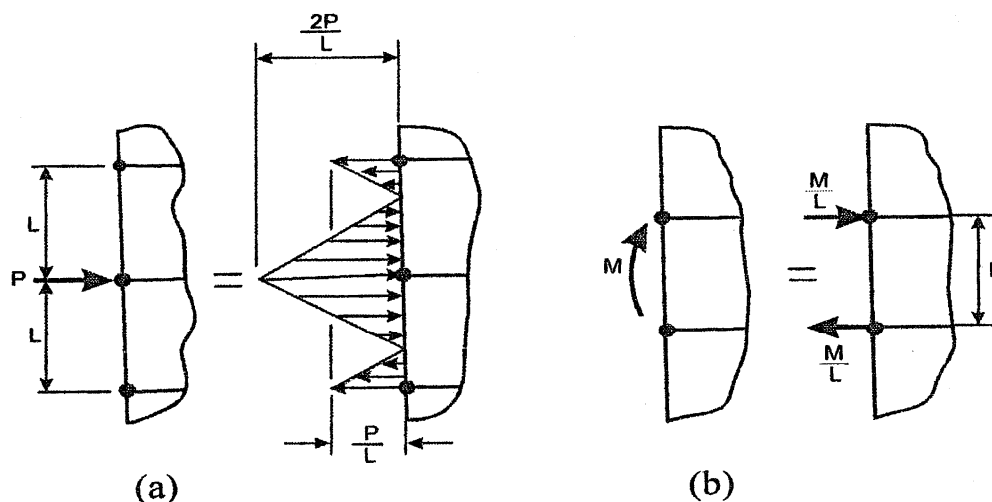


$$F_1 = F \frac{a_x a_y}{A} \left(1 - 2 \frac{b_x}{l_x} - 2 \frac{b_y}{l_y} \right), \quad F_2 = F \frac{a_y b_x}{A} \left(1 - 2 \frac{a_x}{l_x} - 2 \frac{b_y}{l_y} \right),$$

$$F_3 = F \frac{b_x b_y}{A} \left(1 - 2 \frac{a_x}{l_x} - 2 \frac{a_y}{l_y} \right), \quad F_4 = F \frac{a_x b_y}{A} \left(1 - 2 \frac{b_x}{l_x} - 2 \frac{a_y}{l_y} \right),$$

$$F_5 = 4F \frac{a_x b_x a_y}{l_x^2 l_y}, \quad F_6 = 4F \frac{a_y b_y b_x}{l_y^2 l_x}, \quad F_7 = 4F \frac{a_x b_x b_y}{l_x^2 l_y}, \quad F_8 = 4F \frac{a_y b_y a_x}{l_y^2 l_x}$$

Obr. 7.9. Príklady definovania uzlových síl na prvku od povrchového zaťaženia



Obr. 7.10. (a) Koncentrovaná sila a staticky ekvivalentné priamkové zaťaženie na lineárnom okraji rovinného MKP modelu. (b) Pôsobenie momentu, keď uzly majú len posuvné stupne voľnosti

Účinok koncentrovanej sily v uzle prvku sa rozmaže úmerne tvarovej funkcii po povrchu prvku (obr.7.10a). Koncentrovaný moment nemôže pôsobiť v uzle prvku, na ktorom sú definované len posuny (nie rotácie) v uzle (napr. stenové alebo priestorové prvky). Moment sa teda môže zaviesť do výpočtu ako dvojica síl (obr.7.10b). Spojité zaťaženia, ktoré pôsobia v uzloch ako koncentrované sily sú staticky ekvivalentné alebo ekvivalentné v zmysle práce. Ak sú uvažované aj rotačné stopne voľnosti ako napríklad v nosníkových a doskových prvkoch, softvér môže, ale nemusí vo vektore ekvivalentných síl obsahovať momenty v uzloch. Aby sme zistili čo softvér robí, je výhodné urobiť testovací problém s jedným prvkom a výsledky porovnať s teoretickým riešením. Zatiaľ čo v lineárnych úlohách silové zaťaženie nemení svoju pôvodnú orientáciu v priestore, v geometricky nelineárnych úlohách zaťaženie definované na prvok mení svoj smer so zmenou polohy prvku behom výpočtu.

7.5 Okrajové podmienky na konečných prvkoch

Definovanie okrajových podmienok na výpočtovom modeli je jeden z najdôležitejších faktorov ovplyvňujúcich namáhanie danej konštrukcie. Pri niektorých úlohách je stanovenie okrajových podmienok jednoznačné zo zadania úlohy. Vo väčšine prípadoch je však stanovenie okrajových podmienok nejednoznačné. Analytik musí zvažovať ako pretransformovať skutočné okrajové podmienky do konečno prvkového modelu. Okrajové podmienky môžu byť zdrojom singularít modelu. Singularity sa prejavujú nejednoznačnosťou riešenia, záporným determinantom matice tuhosti (*negative or zero determinant of the stiffness matrix*).

Najčastejšie prípady vzniku singularít riešenia vplyvom okrajových podmienok:

- kinematická neurčitosť telesa (jeden alebo viac stupňov voľnosti telesa ako celku),
- voľné nedostatočne viazané uzly (nespojitosť prvkov modelu)
- neviazané sily s modelom (zdvojené uzly v dôsledku chyby v modelovaní).

Okrajové podmienky v mechanike konštrukcií delíme na:

- Statické (sily na povrchu telesa)
- Kinematické (viazané posuny na povrchu telesa)

Statické okrajové podmienky v deformačnom variante MKP nemôžeme predpísať na výpočtovom modeli, čo je nepresnosť vyplývajúca z podstaty približného riešenia variačnej úlohy. Kinematické okrajové podmienky je možné predpísať len v uzloch delenia, to znamená, že pri tvarových funkciách vyššieho stupňa nemusia byť splnené pozdĺž hrany prvku. Rovnako na prvkoch (stenové a priestorové prvky bez pootočení) so stupňami voľnosti v tvare posunov nie je možné splniť podmienku nulovosti pootočenia v prípade votknutia na povrchu prvku. Základné typy okrajových podmienok sú opísané v teoretickej časti tejto učebnice (kap.....).

7.6 Obvyklé chyby modelovania

Obvyklými chybami sú chyby z neznalosti o modelovaní v MKP a omyly riešiteľa v príprave údajov. Poznamenajme, že hlavné chyby, ktoré vznikajú v súvislosti s modelovaním sa týkajú nepochopenia fyzikálneho problému, správania sa prvkov a ohraničení kladených na analýzu. Ďalším zdrojom chýb sú chyby týkajúce sa nesprávneho výkladu analytika pri zadávaní okrajových podmienok alebo zaťaženia. Zvyčajne je software nastavený tak, že údaje zadávané v uzle sú chápané v globálnom alebo uzlovom súradnom systéme a naopak

zaťaženia na prvok je chápaný podľa lokálneho súradného systému, resp. súradného systému prvku. Ignorovaním varovných hlásení daného softvéru sa rovnako môže analytik dopustiť vážnych chýb. V každom štádiu analýzy je preto potrebné venovať veľkú pozornosť hláseniam a analyzovať ich príčiny. Delenie nulou v procese výpočtu sa vyskytuje vtedy, keď matice tuhostí prvkov pre rovinnú napätosť, rovinnú deformáciu, osovosymetriu alebo priestorový stav napätosti sa zostavujú pre Poissonovo číslo $\mu = 0,5$. Ďalej sa delenie nulou vyskytuje vtedy, keď nie je zadaná hrúbka steny, dosky alebo škrupiny, prípadne sú zle zadané geometrické charakteristiky nosníkových prvkov. Pokiaľ sa hrúbka steny nezadá, dosadí sa implicitná hodnota 1, v závislosti na použitom softvéri (odpovedá to rovinnému stavu deformácie). Dost' častou chybou je, ak sa geometrické charakteristiky zadajú pre nosníkový prvok a potom sa zmení typ prvku na prútový. Vtedy sa môže číslo uvedené na nesprávnom mieste v dátach interpretovať ako predpätie.

Singularita globálnej matice tuhosti konštrukcie môže byť spôsobená:

- Materiálovými vlastnosťami – chyby v zadaní materiálových charakteristík modelu
- Nespojitosťou modelu – uzly majú rovnaké súradnice, ale nie sú navzájom viazané
- Kinematickou neurčitosťou modelu – chybne zadané okrajové podmienky
- Nestabilitou riešenia – radové rozdiely v tuhosti prvkov v modeli
- Stratou stability časti modelu pri geometrickej nelinearite („stress stiffening“)
- Divergenciou riešenia v nelineárnych úlohách (veľké zaťaženie alebo malá tuhosť).

Chybové hlásenie o singulárnej matici obvykle ukončí analýzu. V prípade ďalších chybových hlásení je potrebné preveriť ich opodstatnenosť a hľadať zdroje chýb. V opačnom prípade získané výsledky so skrytými chybami nedávajú záruku správnosti analýz a kvality výpočtu.

Niektoré zdroje chýb môžu spočívať v nasledovnom:

- Použitie nesprávnych typov prvkov. Napríklad stenové prvky pre priečne zaťaženie ohybom, nosníkové prvky s uvoľnenými väzbami (element s kĺbovými väzbami, neviazané krútenie na nosníkovom prvku), osovo symetrické prvky pre nesprávnu rovinu zaťaženia.
- Nesprávne definované väzby na modeli. Chybne definované väzby na okraji modelu, nesprávne orientované viazané stupne voľnosti, chybný výklad rovín symetrie a pod.
- Nesprávne definované zaťaženie z hľadiska miesta ich pôsobenia alebo orientácie síl, prípadne teploty. Chybný výklad roviny symetrie alebo asymetrie.

- Nesprávne zadaná merné veličiny. Napr. zaťaženie na jednu dĺžku namiesto pomerného pre jednotkovú dĺžku. Nesprávne použité fyzikálne jednotky pre geometriu, materiál, hustotu alebo pre zaťaženie.
- Zdvojené prvky viazané alebo neviazané s modelom.
- Nesprávna fyzikálna interpretácia modelu.

7.7 Kontrola modelu

Kontrola modelu je potrebné venovať veľkú pozornosť vo všetkých štádiách tvorby a ladenia modelu, ako aj po výpočte a testovania modelu na jednoduché statické alebo kinematické impulzy. Dôsledná kontrola vstupných dát pred spustením výpočtu znižuje náklady a náročnosť na kontrolu po zistení nesprávnych výsledkov výpočtu od definovaného zaťaženia. Kontrola sa realizuje digitálne alebo graficky vizualizáciou zadaných dát (geometrické alebo materiálové charakteristiky alebo zaťaženie). Niektoré kontroly musí urobiť analytik a niektoré logické kontroly zas urobí samotný softvér automaticky.

7.7.1 Kontrola analytikom

Výpočtový konečnoprvkový model môže byť generovaný priamo (cez uzly a prvky) alebo nepriamo automatickým sieťovaním telies. Počas tvorby modelu v interaktívnom režime je možné nastaviť zobrazovanie čísiel uzlov a prvkov, prípadne farebné rozlíšenie prvkov a ich charakteristík (geometrických a materiálových). Rovnako je možné nastaviť si zobrazovanie okrajových podmienok a zaťaženia. Zobrazovanie elementov v zmenšenom rozmere (shrink) umožňuje kontrolu prípadného prekrývania elementov alebo ich vzájomnej nadväznosti. Je potrebné poznamenať, že niektoré kontroly je lepšie urobiť v digitálnom tvare.

7.7.2 Kontrola softvérom

Špičkové softvéry umožňujú vykonať logické kontroly automaticky. Výsledkom týchto kontrol je výpočet numerických hodnôt zo vstupných údajov a ich porovnanie s uloženými údajmi, ktoré definujú hranice akceptovateľnosti. Softvér často umožňuje „kontrolný výpočet“, ktorý automaticky kontroluje vstupné údaje (bez úplného výpočtu úlohy) a tiež môže odhadnúť aj požiadavky na vnútornú a vonkajšiu pamäť a čas potrebný na vykonanie analýzy. Chyby, ktoré odhalí kontrolný výpočet môžu byť:

- Vygenerovaný uzol nie je spojený zo žiadnym prvkom
- Uzly sú navzájom veľmi blízko alebo sú totožné, ale nie sú viazané. Analytik musí rozhodnúť či to odpovedá zvolenému modelu alebo nie.

- Elementy sú spojené v uzle, ale nemajú definované rovnaké stupne voľnosti v uzle.
- Poissonove číslo nie je v rozsahu 0 až 0,5. Analogický test môže odhaliť neexistujúce vlastnosti ortotropického materiálu.
- Elementy majú príliš veľký pomer strán (aspect ratio) alebo príliš rozdielne rohové uhly.
- Uzly na stranách prvkov môžu príliš zakriviť hranu alebo sú príliš ďaleko od stredu.
- Štvoruzlový prvok je príliš zbortený, to znamená uzly neležia v jednej rovine.
- Veľkosť zakrivených škrupinových prvkov je nepomerný k polomeru krivosti.

Testy pre zisťovanie nekorektných tvarov prvkov sú rôzne. Neexistujú však univerzálne kritéria. Preto hlásenia počas kontrolného výpočtu nezaručujú, že tvary prvkov sú vyhovujúce, ani chýbajúce hlásenia nezaručujú, že tvary prvkov sú vyhovujúce. Napriek tomu všetky varujúce správy je potrebné rešpektovať a analyzovať, prípadne prijať príslušné opatrenia. Samozrejme, že automatická kontrola nemôže odhaliť, či sme použili elementy vhodného typu a rozmerov, či sú správne fyzikálne jednotky, či je správne umiestnené zaťaženie a definovanie okrajových podmienok, atď. Analytik je v konečnom dôsledku právne zodpovedný za tieto náležitosti a za kvalitu svojej práce. Je zodpovedný za správny návrh bezpečnosti a spoľahlivosti konštrukcie.

7.8 Zásady modelovania

Postupy modelovania sú rozdielne pre statickú, dynamickú alebo nelineárnu analýzu. Tvorba modelu je závislá na očakávanej odozve, napríklad či ide o lokálnu plasticitu alebo ide o celkový medzný stav konštrukcie.

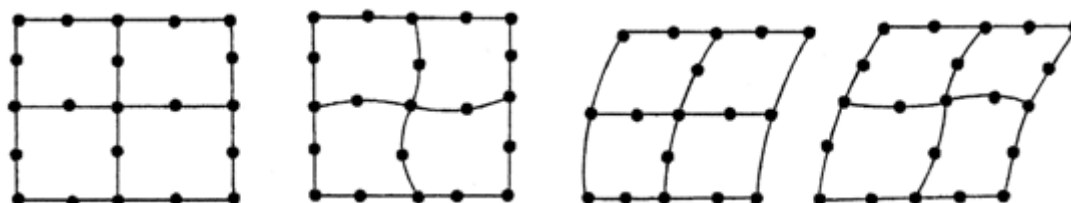
Proces modelovania prebieha v troch krokoch:

- Formulácia úlohy
- Zostavenie modelu
- Riešenie úlohy

V prípade MKP prvým bodom modelovania je definícia geometrie, väzieb s okolím, typu materiálu, zaťaženia a voľba metódy riešenia problému. Súčasťou formulácie úlohy je aj zosumarizovanie dát, resp. všetkých informácií k danému problému. Tieto informácie majú obsahovať požiadavky pre odolnosť a spoľahlivosť, životnosť alebo modálne charakteristiky systému a pod.

7.9 Tvar prvku a jeho degenerácia

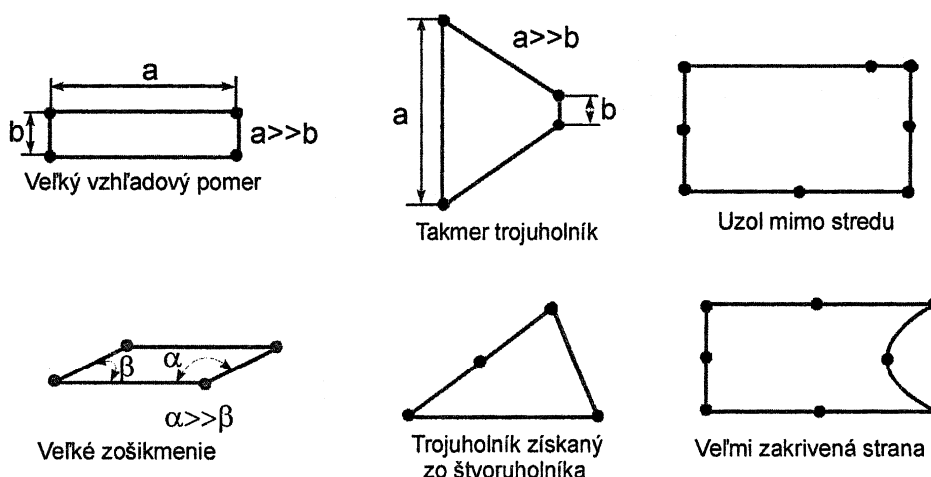
Proces modelovania začína výberom vhodného konečného prvku z knižnice prvkov daného softwaru (obr.7.11). Pre správny výber prvkov je potrebné poznať základné charakteristiky prvku –teoretické predpoklady o stave napätosti a deformácie, tvarové funkcie, stupne voľnosti, a pod.



Obr. 7.11. Zakrivené hranice prvkov

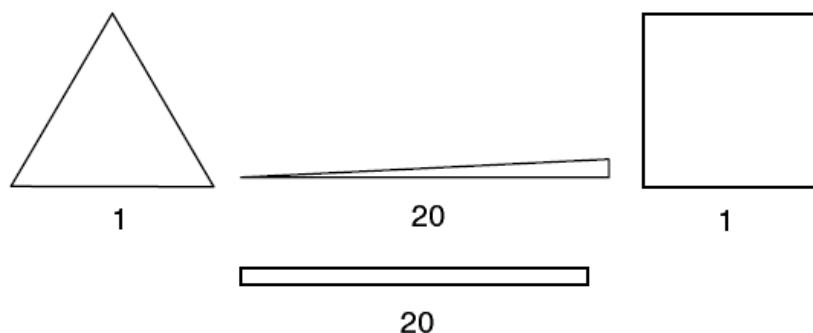
Danú oblasť môžeme diskretizovať rôznymi typmi prvkov avšak musíme dodržať zásadu, že na spoločnej hrane musia mať definovanú tvarovú funkciu pre polynóm rovnakého rádu. Inak povedané na spoločných hranách prvky musia mať rovnaký počet uzlov a stupňov voľnosti v uzle. Izoparametrické prvky s redukovaným počtom uzlov nazývame prechodové prvky. Elementy, ktoré majú ideálne tvary nevykazujú žiadne numerické chyby pri výpočte matíc tuhosti, ak dodržiavame zásady pre voľbu aproximačného polynómu (hladký, úplný, kompatibilný a symetrický) a pravidla numerickej integrácie. Ideálne by bolo keby trojuholníky boli rovnostranné, štvoruholníky štvorce a šesťsteny kocky. Žiaľ v praxi nie je možné modelovať zložité systémy pomocou prvkov s ideálnymi tvarmi. Skutočné problémy vznikajú vtedy ak prvky nemajú rovnaké strany, navyše majú zakrivené strany resp., povrchy prvky. Obvykle sa snažíme vyhnúť tvarom, ktoré sú na obr.7.12. Takéto tvary obvykle znižujú presnosť riešenia, pričom napätia sú menej presné ako posunutia. Degenerované tvary môžu ešte vystihnúť deformácie avšak presnosť pri určení gradientov napätí klesá.

Trojuholníkové prvky lepšie diskretizujú oblasť, ale dávajú horšie výsledky. Trojuholníkové prvky je vhodné použiť na prechodové oblasti medzi jemnou a hrubou sieťou, modelovanie nesúmerných oblastí, modelovanie zakrivených povrchov. V prípade štvoruholníkových prvkov vznikne problém s konvergenciou riešenia, ak jeden z uzlov neleží v rovine určenej ostatnými tromi uzlami.



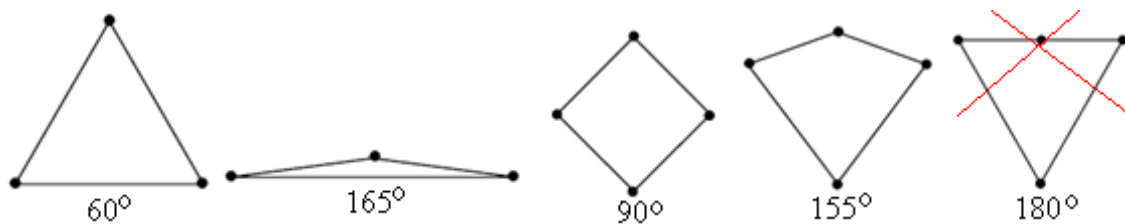
Obr. 7.12 Rovinné prvky s degenerovanými tvarmi

Tvarový pomer (aspect ratio) je jeden z najdôležitejších kritérií výberu tvaru prvku (obr.7.13). Tento pomer musí byť väčší ako 3:1 pre napätia a 20:1 pre posunutia. U trojuholníkov sa tvarovým pomerom označuje pomer dĺžky základne a výšky trojuholníka (odporúčaná hodnota je 2:1). U štvoruholníka sa tým označuje pomer susedných strán (odporúčaná hodnota pre izoparametrické prvky je 2:1).



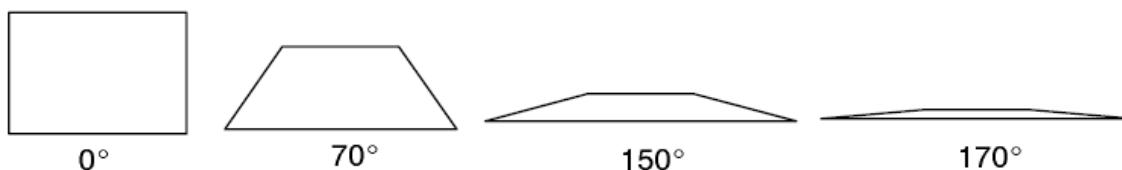
Obr. 7.13 Tvarový pomer trojuholníkových a štvoruholníkových prvkov

Tento pomer je determinovaný tvarovými funkciami, pravidlami numerickej integrácie a fyzikálnou interpretáciou chovania sa prvku. Prvky s vyššími tvarovými funkciami posunutí a vyššími stupňami numerickej integrácii sú menej citlivé na veľké tvarové pomery. Prvky v oblastiach s materiálovou nelinearitou sú viac citlivé na zmeny v tvarovom pomere než v lineárnej oblasti. Najlepším odporúčením pre výber tvarového pomeru je simulácia gradientov posunutí a napätí danej úlohy. Pre rovnaké gradienty napätí vo všetkých troch smeroch je vhodný pomer 1:1. Ak pre daný problém je gradient posunutia alebo napätia dominantný v jednom smere, potom je výhodné zvoliť tvarový pomer 10:1 za predpokladu, že najkratšia strana prvku je v smere maximálneho gradientu.



Obr. 7.14 Skos prvku (a) trojuholníkové prvky, (b) štvoruholníkové prvky

Skos prvku je druhým limitujúcim parametrom ovplyvňujúcim tvar prvku. Optimálnou hodnotou skosu je 90° uhol (pravý uhol) pre štvoruholníkové prvky, respektíve 60° uhol pre trojuholníkové prvky (obr.7.14). Limitujúcou hodnotou skosu uhla pre trojuholníkové prvky je 165° a pre štvoruholníkové 155° bez stredového uzla (resp. 165° so stredovým uzlom). V prípade lichobežníka je limitujúcim skosom uhol 150° pre štvoruholník bez stredového uzla (resp. 170° so stredovým uzlom) (obr.7.15).



Obr. 7.15 Skos prvku v tvare lichobežníka

Skrútenie prvku sa vyskytuje, keď všetky uzly plošných doskových alebo škrupinových prvkov neležia v tej istej rovine alebo keď uzly na jenom povrchu telesa ležia mimo roviny tohto povrchu. Pre priestorové prvky v tvare šesťstena je limitujúcou hodnotou skrútenia jednej steny voči protiaľhlej uhol 45° .

Prechodový pomer je významným limitom pre nerovnomerné delenie oblasti na konečné prvky. Existujú dva typy prechodu. Jeden je zmena hustoty prvku v smere gradientu napätia, v ktorom je najväčšie zjemnenie v smere najväčšieho gradientu. Druhý je priečny prechod, ktorý sa používa medzi prvkami s rozdielnymi hustotami naprieč priečnej roviny. Kritériá pre prechody sú založené na rozmeroch susedných prvkov. Sú to relatívne dĺžky pre čiarové prvky, plochy pre 2D prvky, a objemy pre 3D prvky. Odporúčanou hodnotou maximálneho pomeru dvoch susedných prvkov je pomer 2:1. Toto pravidlo vychádza z deformačnej energie prvku a hustoty deformačnej energie na oblasti. Ideálny model má sieť s konštantnou deformačnou energiou na prvku.

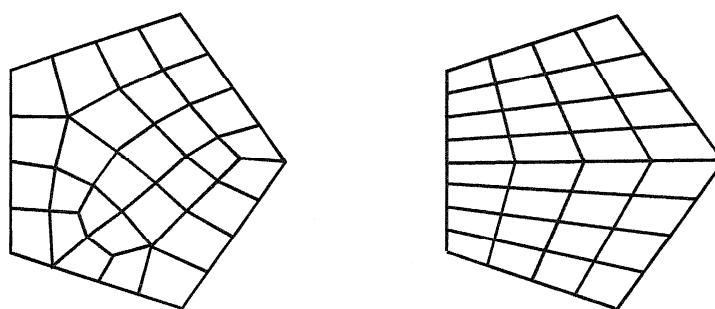
7.10 Diskretizácia oblasti na konečné prvky

Prvým krokom v MKP je diskretizácia oblasti na konečné prvky. Vytvorenie optimálnej siete konečných prvkov na danej oblasti je oblasť výskumu, ktorej sa venuje veľká pozornosť. Kvalita zvolenej siete neovplyvňuje len presnosť riešenia úlohy, ale aj náročnosť na hardware a tým aj čas a cenu analýzy. K vytvoreniu siete konečných prvkov môže analytik pristupovať priamo definovaním siete mechanicky alebo nepriamo („solid modeling“) cez vytvorenie telesa a voľbou automatického generovania.

Vytvorenie siete v MKP môžeme kategorizovať nasledovne:

- Hrubá sieť – výpočet na hrubej sieti dáva veľmi rozdielne hodnoty napätí na susedných prvkoch a niekedy aj s rozdielnymi znamienkami.
- Degenerovaná sieť – je nepravidelná sieť s lokálnym zahustením, resp. výraznými degeneráciami tvaru susedných prvkov, chyby sú koncentrované do lokálnych oblastí
- Optimálna sieť - sieť má dostatočnú hustotu, energetická chyba je minimálna a výsledky po jej dvojnásobnom zahutnení sa výrazne nezmenia
- Jemná sieť - sieť s podrobným delením po celej oblasti, aj v miestach, kde nie sú potrebné podrobné výsledky analýzy.

Pri voľbe automatického generovania siete je výhodné využívať metódu adaptívnych sietí vychádzajúcej z minimalizovania energetickej chyby. V praxi sa viac využíva priamy prístup ku generovaniu siete. V tomto prípade, s využitím skúseností analytika z riešenia obdobných problémov, sa dosahujú optimálne siete s minimálnym počtom stupňov voľnosti.

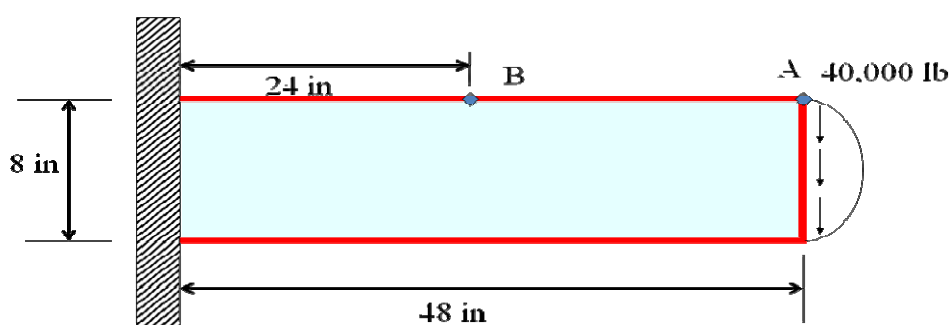


Obr. 7.16 Voľné a mapované sieťovanie

Veľakrát mechanický prístup ku generovaniu siete je efektívnejší ako automatické generovanie siete, kedy získame sieť síce s minimálnou energetickou chybou, ale

zahusťovanie siete sa realizuje aj v oblasti, ktorá nie je významná z pohľadu hodnotenia spoľahlivosti a bezpečnosti konštrukcie.

Na príklade stenovej konzoly o pomere $h/L=1/6$ (obr.7.17) si demonštrujeme vplyv tvarového pomeru na presnosť výpočtu posunu. Počet prvkov a uzlov je približne rovnaký, mení sa však tvarový pomer štvoruzlových prvkov od 1,1 do 24. Výsledky sú porovnané v tabuľke 7.1. Najlepšie výsledky sa dosiahli pri pomere 1,1. Pri tvarovom pomere 24 je chyba až 56%.



$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}, \quad \nu = 0.3, \quad t = 1.0 \text{ in}$$

Obr.7.17 Riešenie ohybu nosníka štvoruzlovými stenovými prvkami PLANE42

Tab.7.1 Porovnanie presnosti riešenia posunu konzoly

Príklad	Tvarový Pomer	Počet uzlov	Počet prvkov	Posun		Chyba [%] v bode A
				Bod A	Bod B	
1	1,1	84	60	-1,093	-0,346	5,2%
2	1,5	85	64	-1,078	-0,339	6,4%
3	3	77	60	-1,014	-0,328	11,9%
4	6	81	64	-0,886	-0,280	23,0%
5	24	85	64	-0,500	-0,158	56,0%
E			Exaktné	-1,152	-0,360	

S hustotou delenia sa zvyšuje presnosť riešenia v MKP. Avšak tento proces je obmedzený efektívnosťou procesu zhusťovania, možnosťami hardwaru a cenou analýzy. Na príklade štvorcovej tenkej dosky s pomerom $h/L=1/100$ po obvode votknutej a zaťaženej rovnomerným zaťažením a singulárnou silou je analyzovaný vplyv hustoty delenia na presnosť riešenia.

Exaktné riešenie ohybu dosky

$$w_{\max} = 0,00126 pL^4 / D, \quad m_{\max} = 0,0231 pL^2, \quad w_{\max} = 0,0056 FL^2 / D, \quad m_{\max} = 0,0536 F$$

$$\text{kde } D = Eh^3 / (12(1 - \mu^2))$$



Obr.7.18 Riešenie ohybu dosky po obvode votknutej od sily F a od rovnomerného zaťaženia p

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}, \quad \nu = 0.3, \quad t = 1.0 \text{ in}$$

Tab.7.2 Porovnanie vplyvu hustoty delenia na presnosť riešenia ohybu tenkej dosky

Príklad	Tvarový	Počet	Počet	Posun		Chyba [%]
	Pomer	uzlov	prvkov	Bod A	Bod B	v bode A
1	1,1	84	60	-1,093	-0,346	5,2%
2	1,5	85	64	-1,078	-0,339	6,4%
3	3	77	60	-1,014	-0,328	11,9%
4	6	81	64	-0,886	-0,280	23,0%
5	24	85	64	-0,500	-0,158	56,0%
			Exaktné	-1,152	-0,360	

7.11 Symetria a asymetria

Vlastnosť symetrie a asymetrie je v analýzach MKP veľmi užitočná. Túto vlastnosť môžeme využiť na jednej strane na redukcii problému bez straty presnosti riešenia a na druhej strane na testovanie vytvoreného modelu, pretože dopredu poznáme hodnoty výstupných veličín na osi symetrie, resp. osi asymetrie.

V zásade rozlišujeme tri typy symetrie:

- geometrická,
- materiálová,
- okrajových podmienok,

Dôležitým pravidlom pri zjednodušovaní modelu je, aby boli splnené všetky tri typy symetrie súčasne. Ak nie je splnený aspoň jeden typ symetrie, nie je možné model zjednodušiť. O asymetrii hovoríme, ak je konštrukcia symetrická z pohľadu okrajových podmienok,

geometrických a materiálových vlastnosti avšak zaťaženie pôsobí asymetricky. Treba tiež zdôrazniť, že každé nesymetrické zaťaženie na symetrickej konštrukcii môžeme rozložiť na symetrické a asymetrické zaťaženie.

Príklad zjednodušenia modelu pre symetrické a asymetrické zaťaženie uvádzame na nasledovných príkladoch (obr.7.19 až 7.21) .

Okrajové podmienky na osi Y pre symetrické a asymetrické zaťaženie sú pre

1. Rám v rovine XY - definujeme okrajové podmienky na osi Y_o (obr.7.19)

- pre symetriu v bode $O(x_o, y_o)$ $u = 0, v \neq 0, \varphi_z = 0 \quad \forall x = x_o, y = y_o$

- pre asymetriu v bode $O(x_o, y_o)$ $u = 0, v = 0, \varphi_z \neq 0 \quad \forall x = x_o, y = y_o$

2. Stena v rovine XY - definujeme okrajové podmienky na osi Y_o (obr.7.20)

- pre symetriu $u = 0, v \neq 0 \quad \forall x = x_o$

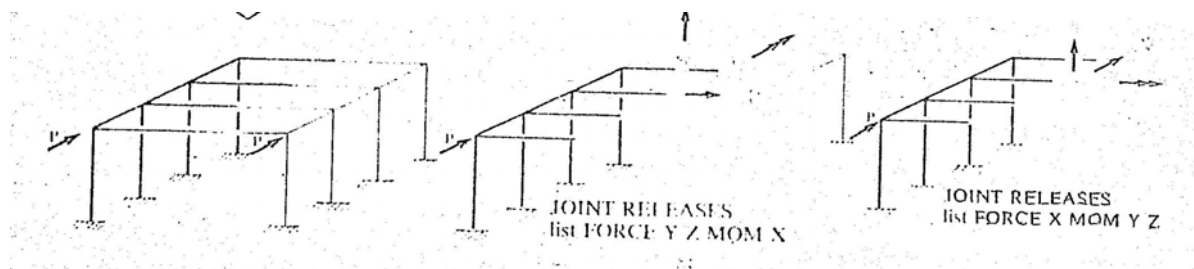
- pre asymetriu $u \neq 0, v = 0 \quad \forall x = x_o$

3. Doska v rovine XY - definujeme okrajové podmienky na osi Y_o (obr.7.21)

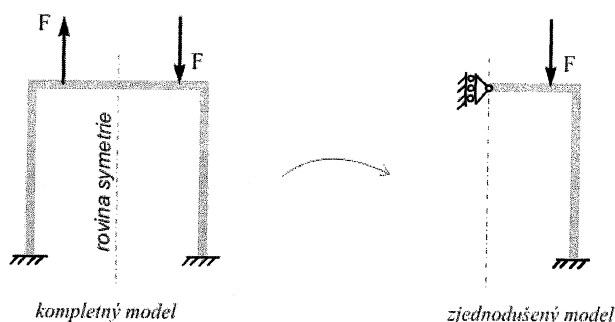
- pre symetriu $u = 0, v \neq 0 \quad \varphi_y = 0 \quad \varphi_z = 0 \quad \forall x = x_o$

- pre asymetriu $u \neq 0, v = 0 \quad \varphi_y \neq 0 \quad \varphi_z = 0 \quad \forall x = x_o$

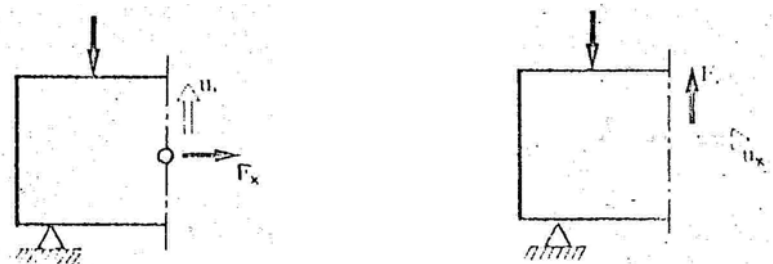
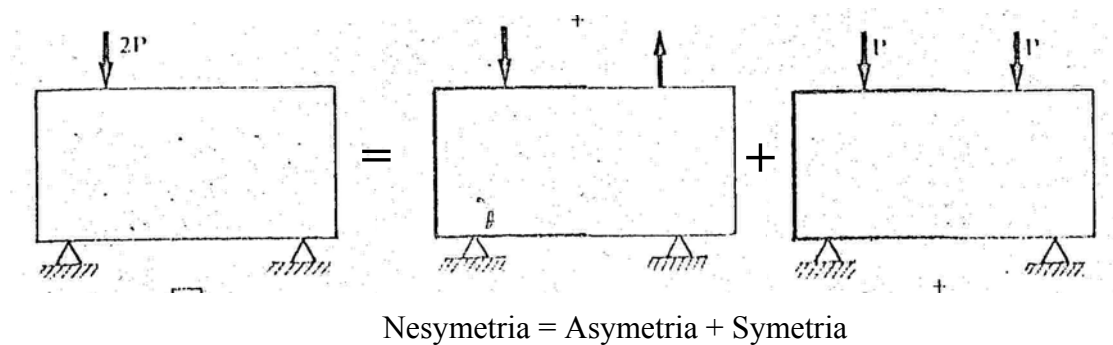
Nesymetria = Asymetria + Symetria



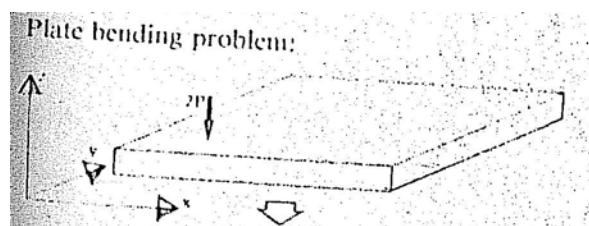
Nesymetrické zaťaženie síl na priestorovom ráme so symetrickými okrajovými podmienkami rozložená na kombináciu nesymetrického a symetrického zaťaženia na polovine sústavy s okrajovými podmienkami na rovine asymetrie a symetrie



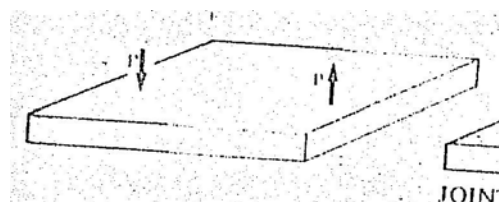
Obr. 7.19 Okrajové podmienky na symetrickom ráme so symetrickým a asymetrickým zaťažením



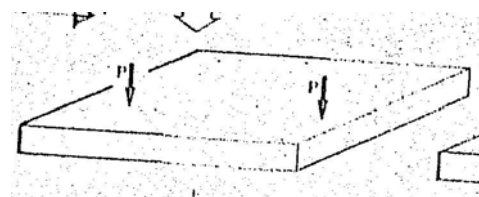
Obr. 7.20 Okrajové podmienky na symetrickej stene s asymetrickým a symetrickým zaťažením



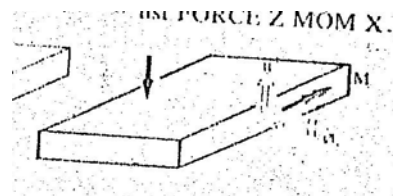
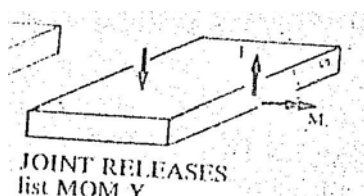
Nesymetrická singulárna sila $2F$ na symetrickej doske



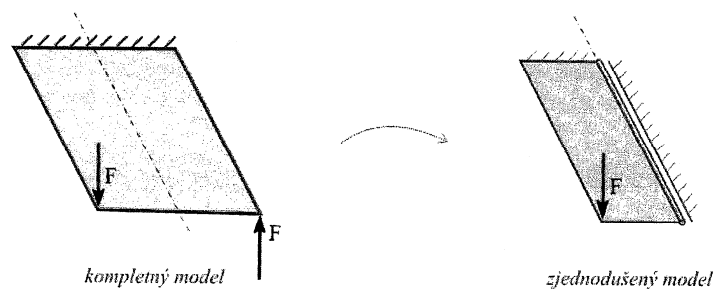
Asymetrické dve singulárne sily na doske



Symetrické dve singulárne sily na doske



Redukcia úlohy na polovinu dosky ako asymetrickej a symetrickej časti zaťaženia a okrajových podmienok



Obr. 7.21 Okrajové podmienky na symetrickej doske so symetrickým a asymetrickým zaťažením

Ak analytik nemá istotu v definovaní okrajových podmienok na zjednodušenom modeli, odporúčame vykonať analýzu kompletného modelu s hrubou sieťou bez ohľadu na kvitatívne vyjadrenie výsledkov s tým, že získa obraz o priebehoch deformácií a napätí. Oblasť s kladným resp. záporným priebehom ktorejkoľvek veličiny riešenia musí byť rovnaká v komplexnom aj zjednodušenom modeli.

8. SYSTÉM ANSYS

Systém ANSYS obsahuje viac ako 100 základných prvkov (Tab.8.1). V tejto kapitole si uvedieme stručný popis niektorých z nich.

8.1 Základné typy konečných prvkov

Tab.8.1 Prehľad základných typov prvkov programu ANSYS

Typ	Tvar alebo charakteristika	Meno prvku
Prút	Všeobecne Bilineárny (lano)	LINK1, LINK8 LINK10
Nosník	Všeobecne Tenkostenný Plastický	BEAM3, BEAM4 BEAM54, BEAM44 BEAM23, BEAM24
Rúra	Všeobecná Premenná Plastická	PIPE16, PIPE17, PIPE18 PIPE59 PIPE20, PIPE60
2D teleso	Štvoruholník Trojuholník Hyperelastický Viscoelastický Veľké deformácie Harmonické	PLANE42, PLANE82 PLANE2 HYPER84, HYPER56, HYPER74 VISCO88 VISCO106, VISCO108 PLANE83, PLANE25
3D teleso	Šesťsten Štvorsten Vrstevnaté Anizotropické Hyperelastické Veľké deformácie	SOLID45, SOLID95, SOLID73 SOLID92, SOLID72 SOLID46 SOLID64, SOLID65 HYPER86, HYPER58 VISCO107
Škrupina	Štvoruholník Osovosymetrický Vrstevnatý Šmykový panel	SHELL93, SHELL63, SHELL41, SHELL43 SHELL51, SHELL61 SHELL91, SHELL99 SHELL28
Kontakt	Bod s plochou Bod s bodom Tuhý povrch	CONTAC48, CONTAC49 CONTAC12, CONTAC52 CONTAC26
Viazaný s tekutinou	Akustický Piezoelektrický Teplota a tuhosť Magnetizmus a tuhosť	FLUID29, FLUID30 PLANE13, SOLID5, SOLID98 PLANE13, SOLID5, SOLID98 PLANE13, SOLID5, SOLID98
Špeciálny	Pružina s tlmičom Hmotný bod (teleso) Kombinovaný prvok Povrchové efekty Bodový kĺb Lineárna pružina s tlmičom Dynamika prúdenia Matica tuhosti	COMBIN14, COMBIN40, COMBIN39 MASS21 COMBIN37 SURF19, SURF22 COMBIN7 LINK11 FLUID38 MATRIX27, MATRIX50

Pre riešenie prútových sústav môžeme využiť prvky typu LINK1, LINK8, LINK10, LINK11, LINK160. Pre riešenie rámových konštrukcií pozostávajúcich z nosníkových

prvkov máme BEAM3, BEAM4, BEAM23, BEAM24, BEAM44, BEAM54. Pre riešenie stenových a doskových konštrukcií máme prvky SHELL28, SHELL41, SHELL43, SHELL51, SHELL61, SHELL63. Pre riešenie rovinnej napätosti a deformácie máme PLANE2, PLANE13, PLANE25, PLANE42. Pre priestorový stav napätosti sú SOLID5, SOLID45, SOLID46, SOLID62, SOLID64, SOLID65, SOLID72, SOLID73, SOLID95, SOLID147, SOLID148, SOLID164.

LINK8 – 3D prútový prvok

Priestorový prútový prvok je vhodný na riešenie prútových sústav schopných prenášať namáhanie na ťah a tlak. Prvok je modelovaný na namáhanie elastické, plastické, zmrašťovaním, dotvarovaním a počiatočnými napätiami. Prvok LINK10 je modifikáciou tohoto prvku pre prípad namáhania len na tlak alebo na ťah (problém tiahla). Na prvku (obr.3.4) s uzlami “i” a “j” je definovaný vektor deformačných parametrov $\{r\}$ v tvare

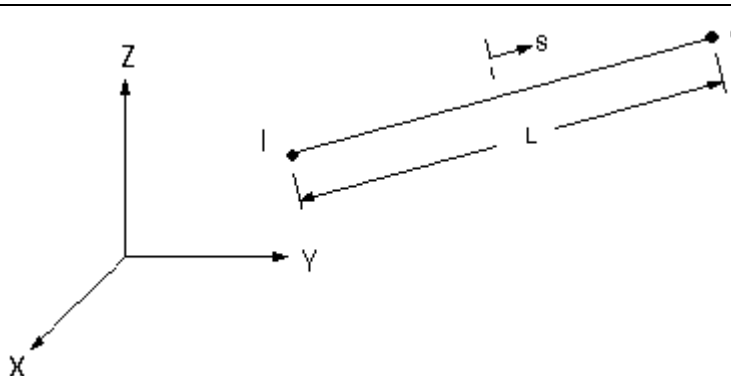
$$\{r\} = \{u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j\}$$

Posuny u , v , w na prúte LINK8 sú aproximované lineárnym polynómom pre parametrickú súradnicu $-1 \leq s \leq 1$ v tvare

$$u = \frac{1}{2} \cdot (u_i \cdot (1-s) + u_j \cdot (1+s))$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot (v_i \cdot (1-s) + v_j \cdot (1+s))$$

$$w = \frac{1}{2} \cdot (w_i \cdot (1-s) + w_j \cdot (1+s))$$



Obr. 8.4

Priebeh pomerných deformácií a napätí po dĺžke prvku je teda konštantný.

Vstupné dáta:

- ☛ reálne konštanty – AREA, ISTRN
- ☛ materiálové konštanty – EX, ALPX, DENS, DAMP

AREA je prierezová plocha, ISTRN – počiatočné napätie σ_0 ,
EX – modul pružnosti, ALPX – súčiniteľ tepelnej rozťažnosti, DENS – hustota, DAMP – útlm (pre dynamické namáhanie)

Výstupné dáta:

- ☛ uzlové sily v globálnych súradniciach
- ☛ osovú sily a napätia v tabuľke, ktoré získame príkazom **ETABLE**

Napr. ETABLE, Nx, SMIS, 1 ! definuje sa premenná "Nx"
PRETAB ! zobrazí listing výstupných dát
PLLS, Nx, Nx ! graficky zobrazí priebeh osových síl

BEAM4 – 3D nosníkový prvok

Priestorový nosníkový prvok je vhodný na riešenie priestorových rámových sústav. Prvok je modelovaný na namáhanie elastické, počiatočnými deformáciami a veľkými priehybmi. Prvok BEAM44 je modifikáciou tohoto prvku pre prierez všeobecného tvaru a s možnosťou uvoľňovania väzieb v koncových uzloch. Na prvku (obr.3.4) s uzlami "i" a "j" je definovaný vektor deformačných parametrov {r} v tvare

$$\{r\} = \{u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}, u_j, v_j, w_j, \varphi_{xj}, \varphi_{yj}, \varphi_{zj}\}^T$$

a vektor uzlových síl

$$\{F\} = \{F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, F_{xj}, F_{yj}, F_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}\}^T$$

Posuny u a rotácie φ_x na prúte BEAM4 sú aproximované lineárnym polynómom a posuny v smere kolmom na os prúta v a w sú aproximované kubickým polynómom pre parametrickú súradnicu $-1 \leq s \leq 1$ v tvare

$$u = \frac{1}{2} \cdot (u_i \cdot (1-s) + u_j \cdot (1+s)), \quad \varphi_x = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_{xi} \cdot (1-s) + \varphi_{xj} \cdot (1+s)),$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot \left(v_i \cdot \left(1 - \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) + v_j \cdot \left(1 + \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) + \frac{L}{8} \cdot (\varphi_{zi} (1-s^2)(1-s) - \varphi_{zj} (1-s^2)(1+s)) \right),$$

$$w = \frac{1}{2} \cdot \left(w_i \cdot \left(1 - \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) + w_j \cdot \left(1 + \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) - \frac{L}{8} \cdot (\varphi_{yi} (1-s^2)(1-s) - \varphi_{yj} (1-s^2)(1+s)) \right)$$

Vstupné dáta:

- ☛ reálne konštanty – AREA, IZZ, IYY, TKZ, TKY, THETA, ISTRN, IXX, SHEARZ, SHEARY, SPIN, ADDMAS
 - ☛ materiálové konštanty – EX, ALPX, DENS, GXY, DAMP
-

AREA je prierezová plocha, IZZ (IYY) – kvadratické momenty zotrvačnosti, TKZ (TKY) – výška a šírka prierezu, THETA – uhol pootočenia lokálnej osi Y od globálnej roviny $X_G Y_G$, ISTRN – počiatočné napätie, IXX – moment zotrvačnosti v krútení, SHEARZ (SHEARY) – súčiniteľ efektívnej šmykovej plochy prierezu, ADDMAS – prídavná hmotnosť na bežný meter.

EX – modul pružnosti, ALPX – súčiniteľ tepelnej rozťažnosti, DENS – hustota, GXY – šmykový modul, DAMP – proporcionálny útlm (pre dynamické namáhanie)

Výstupné dáta:

➤ uzlové sily v globálnych súradniciach

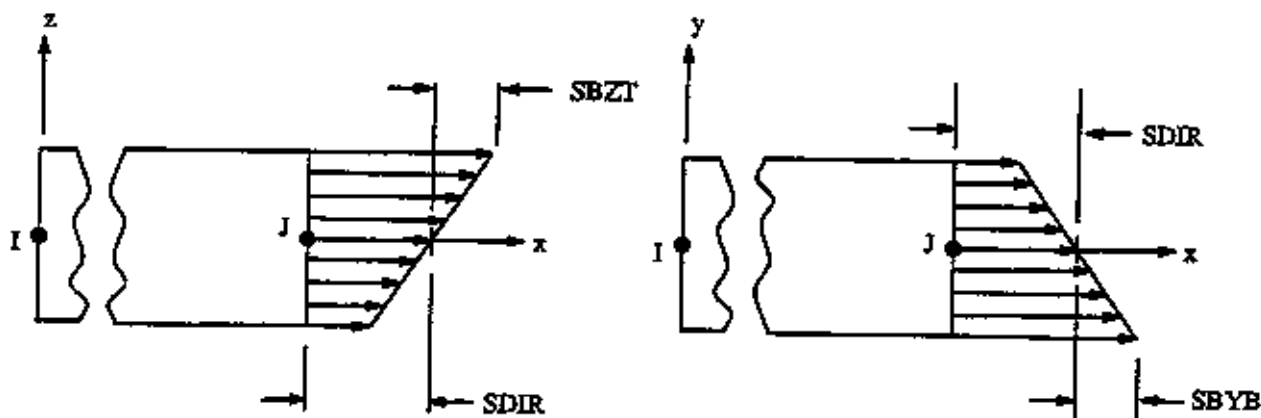
➤ osovú sily a napätia v tabuľke, ktoré získame príkazom **ETABLE**

```

Např.      ETABLE,Fxi,SMIS,1      ! definuje sa premenná "Fxi"
           ETABLE,Fyi,SMIS,2      ! definuje sa premenná "Fyi"
           ETABLE,Fzi,SMIS,3      ! definuje sa premenná "Fzi"
           ETABLE,Mxi,SMIS,4      ! definuje sa premenná "Mxi"
           ETABLE,Myi,SMIS,5      ! definuje sa premenná "Myi"
           ETABLE,Mzi,SMIS,6      ! definuje sa premenná "Mzi"
           ETABLE,Fxj,SMIS,7      ! definuje sa premenná "Fxj"
           ETABLE,Fyj,SMIS,8      ! definuje sa premenná "Fyj"
           ETABLE,Fzj,SMIS,9      ! definuje sa premenná "Fzj"
           ETABLE,Mxj,SMIS,10     ! definuje sa premenná "Mxj"
           ETABLE,Myj,SMIS,11     ! definuje sa premenná "Myj"
           ETABLE,Mzj,SMIS,12     ! definuje sa premenná "Mzj"
           PRETAB                  ! zobrazí listing definovaných
vnútorných síl
           PLLS,Fxi,Fxj           ! graficky zobrazí priebeh osových
síl,...
```

Znamienková konvencia :

Znamienková konvencia vnútorných síl sa uvažuje podľa kladnej orientácie koncových síl v pravom uzle (obr.8.5).



BEAM44 – 3D nosníkový prvok

Priestorový nosníkový prvok je vhodný na riešenie priestorových rámových sústav s nesymetrickým prierezom a premenným po dĺžke, s možnosťou uvoľňovania väzieb v koncových uzloch. Prvok BEAM44 je modifikáciou prvku BEAM4. Na prvku s uzlami “i” a “j” je definovaný vektor deformačných parametrov $\{r\}$ a vektor uzlových síl $\{F\}$ v tvare

$$\{r\} = \{u_i, v_i, w_i, \phi_{xi}, \phi_{yi}, \phi_{zi}, u_j, v_j, w_j, \phi_{xj}, \phi_{yj}, \phi_{zj}\}^T$$

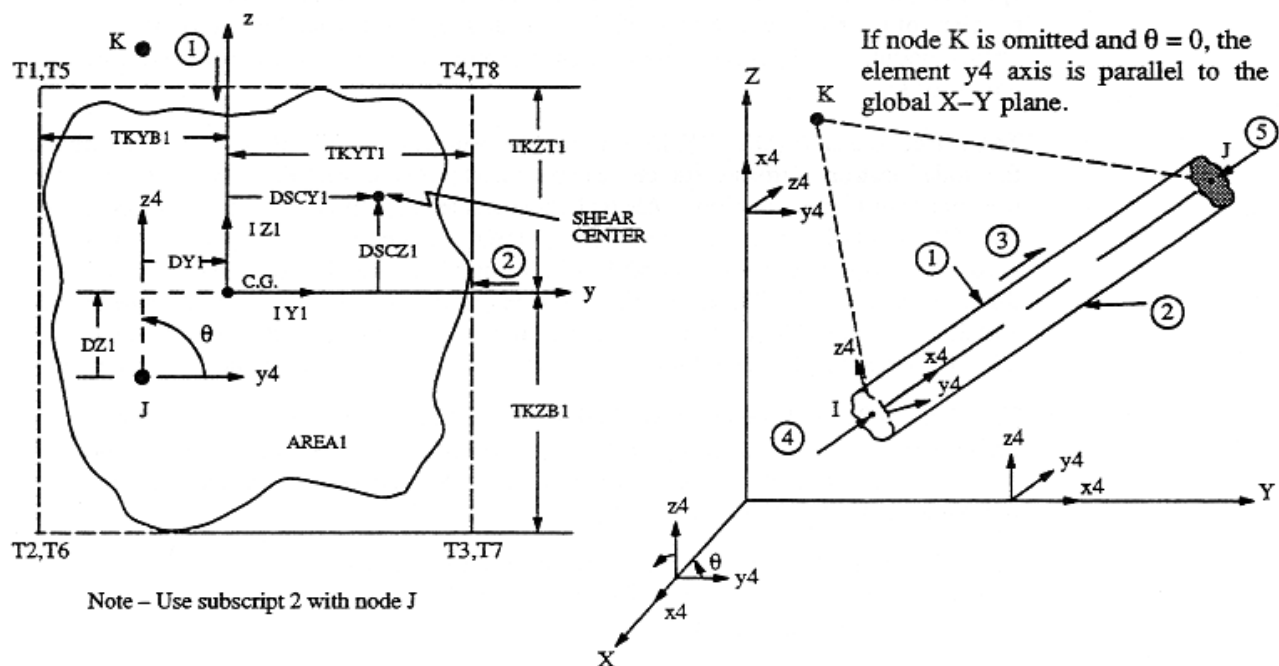
$$\{F\} = \{F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, F_{xj}, F_{yj}, F_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}\}^T$$

Vstupné dáta :

- ☛ reálne konštanty – AREA1, IZZ1, IYY1, IXX1, TKZB1, TKYB1,
 AREA2, IZZ2, IYY2, IXX2, TKZB2, TKYB2,
 DX1, DY1, DZ1, DX2, DY2, DZ2,
 SHEARZ, SHEARY, TKZT1, TKYT1, TKZT2,
 TKYT2,

 Konštanty 53 až 55
 THETA, ISTRN, ADDMAS
- ☛ materiálové konštanty – EX, ALPX, DENS, GXY, DAMP

kde význam jednotlivých symbolov je obdobný ako v prípade prvku BEAM4. Charakteristiky prierezu TKZB1,TKYB1,TKZT2,TKYT2 sú zrejmé z obr.8.6



Obr.8.6

Výstupné dáta:

- uzlové sily v globálnych súradniciach
- osové sily a napätia v tabuľke, ktoré získame príkazom **ETABLE** (ako u BEAM4)

Znamienková konvencia:

Znamienková konvencia vnútorných síl sa uvažuje podľa kladnej orientácie koncových síl v pravom uzle (obr.8.5).

SHELL43 – 3D škrupinový prvok

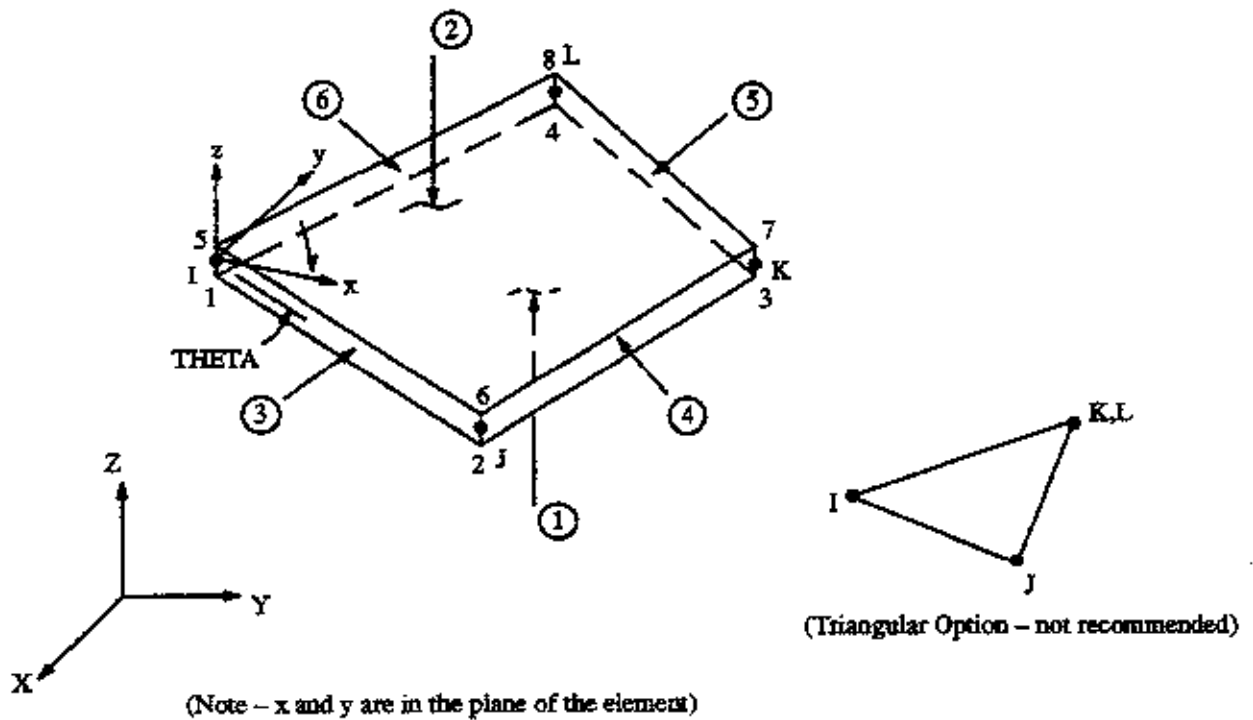
Priestorový škrupinový prvok je vhodný na riešenie stenových a doskových sústav. Prvok je modelovaný na namáhanie elastické, plastické, zmrašťovaním, dotvarovaním a počiatočnými napätiami, počiatočnými deformáciami a veľkými deformáciami. Prvok SHELL63, SHELL181 je modifikáciou tohoto prvku. Na prvku s uzlami “i, j, k l” je definovaný vektor deformačných parametrov $\{r\}$ a vektor zovšeobecnených uzlových síl v tvare

$$\{r\} = \{r_i, r_j, r_k, r_l\}^T,$$

$$\{F\} = \{F_i, F_j, F_k, F_l\}^T,$$

$$\{r_i\} = \{u_i, v_i, w_i, \phi_{xi}, \phi_{yi}, \phi_{zi}\}^T$$

$$\{F\} = \{F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}\}^T$$



Obr.8.7

Zložky vektora posunov je aproximovaný bilineárnymi polynómami v tvare

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nnode} N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{nnode} N_i \cdot \frac{r \cdot t_i}{2} \begin{bmatrix} a_{1,i} & b_{1,i} \\ a_{2,i} & b_{2,i} \\ a_{3,i} & b_{3,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix},$$

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 + ss_i)(1 + tt_i)$$

kde N_i je bilineárna tvarová funkcia posunov pre $i = 1$ až $nnode$ ($nnode$ je počet uzlov prvku, t.j. 3 alebo 4) vyjadrená v závislosti od izoparametrických súradníc $s(x,y)$ a $t(x,y)$ ($-1 \leq s, t \leq 1$), r je súradnicová hrúbka, t_i je hrúbka v uzle i , $\{a\}$ (resp. $\{b\}$) je jednotkový vektor v smere s (resp. t), $\theta_{x,i}$ (resp. $\theta_{y,i}$) je rotácia v uzle i okolo vektora $\{a\}$ (resp. $\{b\}$).

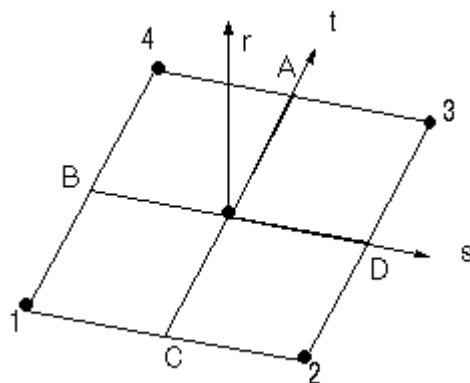
Pomerné šmykové deformácie v smere kolmom na rovinu prvku aproximujeme v tvare

$$\tilde{\varepsilon}_{13} = \frac{1}{2} \cdot (1+t) \cdot \tilde{\varepsilon}_{13}^A + \frac{1}{2} \cdot (1-t) \cdot \tilde{\varepsilon}_{13}^C$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2} \cdot (1+s) \cdot \tilde{\varepsilon}_{23}^D + \frac{1}{2} \cdot (1-s) \cdot \tilde{\varepsilon}_{23}^B$$

$$\tilde{\varepsilon}_{13}^A = \tilde{\varepsilon}_{13}^{DI} \quad | \text{ v bode A, } \quad \tilde{\varepsilon}_{13}^C = \tilde{\varepsilon}_{13}^{DI} \quad | \text{ v bode C, }$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23}^D = \tilde{\varepsilon}_{23}^{DI} \quad | \text{ v bode D, } \quad \tilde{\varepsilon}_{23}^B = \tilde{\varepsilon}_{23}^{DI} \quad | \text{ v bode B, }$$



Obr.8.8

kde symbol DI odpovedá hodnotám pomernej deformácie vypočítanej priamo z premiestnení.

Vstupné dáta:

- ☛ reálne konštanty – TK(i), TK(j), TK(k), TK(l), THETA
- ☛ materiálové konštanty – EX, EY, EZ, (PRXY, PRYZ, PRZX alebo NUXY, NUYZ, NUZX)
- ALPX, ALPY, ALPZ, DENS, GXY, GYZ, GZX, DAMP

TK(i) je hrúbka škrupiny v uzle I,
EX, EY, EZ – moduly pružnosti, NUXY, NUYZ, NZX – poissonove čísla, ALPX, ALPY, ALPZ – súčinitele tepelnej rozťažnosti, DENS – hustota, GXY, GYZ, GZX – šmykové moduly, DAMP – útlm (pre dynamické namáhanie)

Výstupné dáta :

- ☛ uzlové sily v globálnych súradniciach
- ☛ intenzity osových síl a momentov v tabuľke, ktoré získame príkazom **ETABLE**

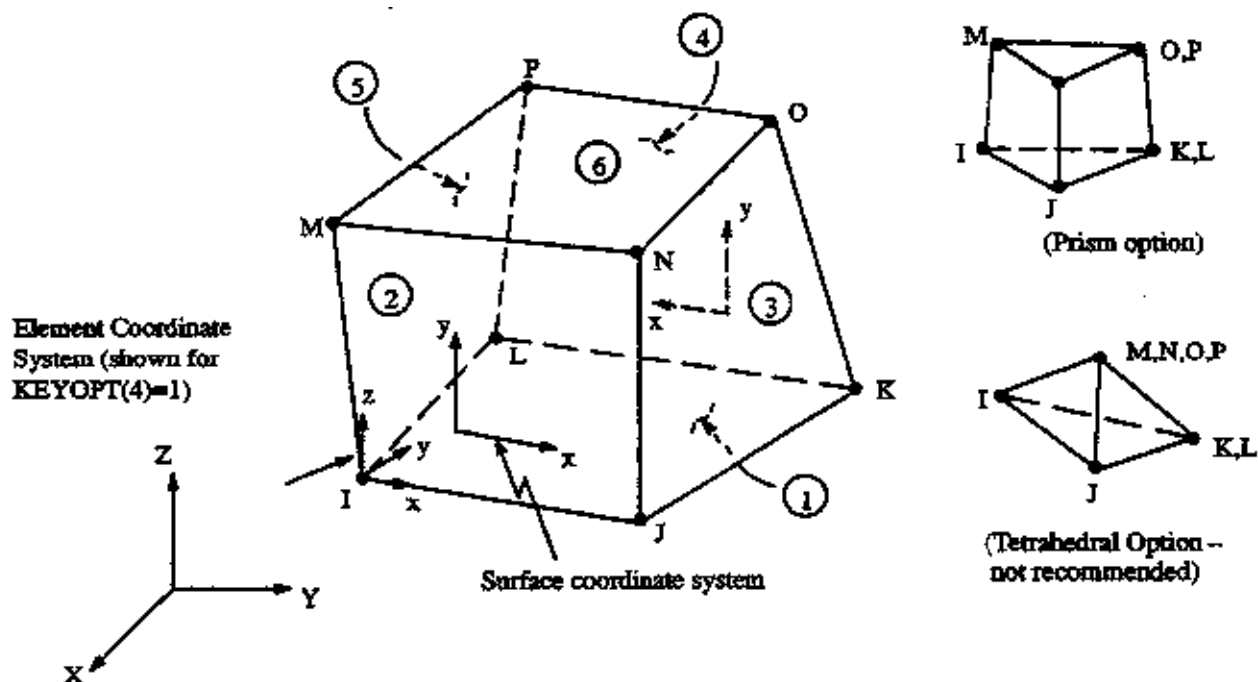
```
Napr.  ETABLE,tx,SMIS,1      ! definuje sa premenná "tx"
        ETABLE,ty,SMIS,2      ! definuje sa premenná "ty"
        ETABLE,txy,SMIS,3     ! definuje sa premenná "txy"
        ETABLE,mx,SMIS,4      ! definuje sa premenná "mx"
        ETABLE,my,SMIS,5      ! definuje sa premenná "my"
        ETABLE,mxy,SMIS,6     ! definuje sa premenná "mxy"
        ETABLE,nx,SMIS,7      ! definuje sa premenná "nx"
        ETABLE,ny,SMIS,8      ! definuje sa premenná "ny"
        PRETAB                ! výpis listingu s definovanými
dátami
        PLETAB,tx,AVG         ! vykreslenie intenzity membránových
síl "tx"
```

SOLID45 – 3D priestorový prvok

Priestorový prvok je vhodný na riešenie masívnych konštrukcií. Prvok je modelovaný na namáhanie elastické, plastické, zmrašťovaním, dotvarovaním a počiatočnými napätiami, počiatočnými deformáciami a veľkými deformáciami. Prvok SOLID64, SOLID95 je modifikáciou tohoto prvku. Na prvku (obr.8.9) s uzlami “i, j, k, l, m, n, o p” je definovaný vektor deformačných parametrov $\{r\}$ v tvare

$$\{r\} = \{r_i, r_j, r_k, r_l\},$$

$$\{r_i\} = \{u_i, v_i, w_i, \phi_{xi}, \phi_{yi}, \phi_{zi}\}$$



Obr.8.9

Zložky vektora posunov sú aproximované lineárnym polynómom v priestore v tvare

$$u = \sum_{i=1}^{nnode} N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{nnode} N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{nnode} N_i w_i, \quad N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + ss_i) \cdot (1 + tt_i) \cdot (1 + rr_i),$$

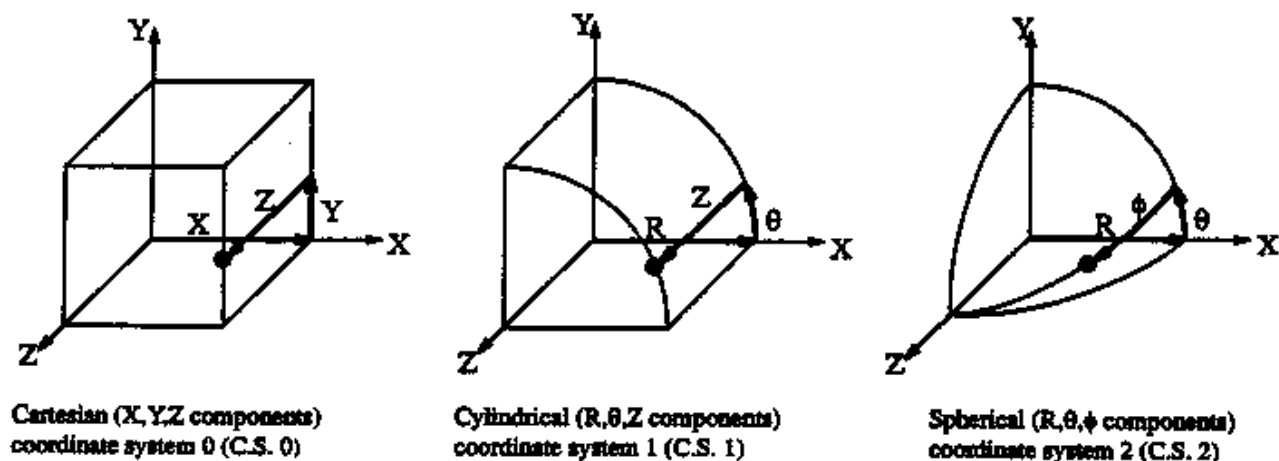
$$x = \sum_{i=1}^{nnode} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{nnode} N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^{nnode} N_i z_i,$$

Vstupné dáta:

- ☛ reálne konštanty – nemá
- ☛ materiálové konštanty – EX, EY, EZ, (PRXY, PRYZ, PRZX alebo NUXY, NUYZ, NUZX)
- ALPX, ALPY, ALPZ, DENS, GXY, GYZ, GZX,
- DAMP

Pred generovaním modelu sa v preprocesore definuje súradnicový systém, v ktorom sa následné operácie budú realizovať. Globálny súradnicový systém sa generuje príkazmi **LOCAL**, **CS**,... a aktivuje príkazom **CSYS**, **KCN** (**KCN** je číslo zadaného súradnicového systému).

V procese generovania alebo modifikovania vlastností základných entít systém umožňuje vyselektovať zadanú množinu entít, pričom všetky následné príkazy sa realizujú len pre aktívne (vyselektované) entity.



Obr.8.1

NSEL, *Type*, *Item*, *Comp*, *VMIN*, *VMAX*, *VINC*, *KABS*

Type – typ operácie: S → selektovanie definovaného zoznamu uzlov

R → reselectovanie uzlov z vyselektovaných

U → odselektovanie uzlov z vyselektovaných

A → priselektovanie uzlov k vyselektovaným

ALL → vyselektovanie všetkých uzlov

NONE → odselektovanie všetkých uzlov

INVE → inverzné selektovanie

STAT → informácie o stave selektovania

Item – definovaná entita (*Item*=P je pick), implicitne je NODE

VMIN, *VMAX*, *VINC* – definuje zoznam uzlov (od *VMIN* do *VMAX* s krokom *VINC*)

KABS – definuje spôsob kontroly (=0 je zapnutá, =1 nie je zapnutá)

V systéme ANSYS sú definované dve základné filozofie tvorby výpočtového modelu:

1. Generovanie konečných prvkov – **direct modeling**
2. Generovanie telies – **solid modeling**

V oboch prípadoch sa pre generovanie môže použiť:

1. Priame definovanie základných entít
2. Automatické generovanie entít (kopírovaním, zrkadlovým obrazom, booleans...)

V prípade priameho generovania konečných prvkov sa postupuje v smere

☛ Uzol (Node) → Prvok (Element) → Vlastnosti (Properties)

Pri využití generovania cez telesá sa postupuje dvomi cestami

- ☛ Teleso (Solid) → Plocha (Area) → Čiara (Line) → Kľúčové body (Keypoint) → Konečné prvky (Element) → Uzly (Node)
- ☛ Kľúčové body (Keypoint) → Čiara (Line) → Plocha (Area) → Teleso (Solid) → Konečné prvky (Element) → Uzly (Node)

8.2.1 Priame generovanie prvkov

Vo všetkých prípadoch sa základné entity buď definujú priamo alebo generujú. **Nové entity** sa môžu generovať nasledovnými spôsobmi

1. Kopírovaním základného zoznamu (**NGEN, EGEN, KGEN, LGEN, AGEN, VGEN**)
2. Zrkadlovým kopírovaním – symetrizovaním (**ENSYM, LSYMM, ARSYM, VSYM**)
3. Posúvaním definovaných entít po zadanej ceste (**LDRAG, ADRAG**)
4. Rotáciou jednej entity okolo zadanej osi (**LROTAT, AROTAT, VROTAT**)
5. Vyplnením zadaného intervalu (**FILL, Kfill**)
6. Delením na menšie entity (**LDIV**)
7. Booleanovskými operáciami

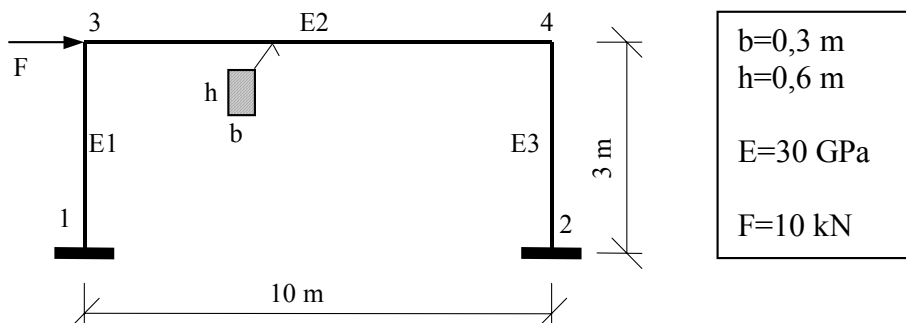
Najčastejšie operácie s jednotlivými entitami charakterizuje tabuľka 8.1

Tabuľka 8.1

Názov	Vytvorenie	Výpis zoznamu	Vykreslenie	Vymazanie	Modifikácia	Selektovanie
Node	N	NLIST	NPLOT	NDELE	NMODIF	NSEL
Element	E	ELIST	EPLOT	EDELE	EMODIF	ESEL
Keypoint	K	KLIST	KPLOT	KDELE	KMODIF	KSEL
Line	L	LLIST	LPLOT	LDELE	LMODIF	LSEL
Area	A	ALIST	APLOT	ADELE	AMODIF	ASEL
Volume	V	VLIST	VPLOT	VDELE	VMODIF	VSEL

Príklad 8.1

Vygenerujte priamo jednoduchý rám z prvkov BEAM3 o rozpone 10m (v smere osi X) a výške 3m (v smere osi Y). Konštrukcia bude zaťažená jedinou silou, od ktorej očakávame iba lineárny priebeh ohybových momentov a konštantné hodnoty normálových a priečnych síl. Nie je preto nutné konštrukciu deliť na väčší počet prvkov.



Riešenie:

```
/PREP7
ET,1,BEAM3          ! Definovanie 1.typu prvku ako BEAM3
MP,EX,1,30e6        ! Definovanie modulu pružnosti Ex=30e6 kPa pre
1.materiál
R,1,0.18,5.4e-3      ! Definovanie prierezových charakteristík
                     ! (A=0.18, Izz=5.4e-3) pre číslo 1
N,1,                ! Definovanie uzla č.1 s x=0, y=0
N,2,10,             ! Definovanie uzla č.2 s x=10, y=0
N,3,,3              ! Definovanie uzla č.3 s x=0, y=3
N,4,10,3            ! Definovanie uzla č.4 s x=10, y=3
E,1,3               ! Definovanie prvku spojením uzlov 1 a 3
E,2,4               ! Definovanie prvku spojením uzlov 1 a 3
E,3,4               ! Definovanie prvku spojením uzlov 1 a 3
SAVE                ! Uloženie dát do súboru "Job.db"
CDWRITE              ! Uloženie dát do ASCII súboru "Job.cdb"
FINISH              ! Ukončenie preprocesora
```

Príklad 8.2

Definujte lokálny súradný systém č.11, ktorého os Z je totožná s osou X globálneho súradnicového systému, ďalej lokálny súradný systém č.12, ktorého os Z je totožná s osou Y globálneho súradnicového systému a lokálny súradný systém č.13, ktorého os Z je totožná s osou Z globálneho súradnicového systému. Súradnice X lokálnych súradnicových systémov uvažujte rovnobežné s rovinou XY globálneho súradnicového systému alebo totožne s osou X. Škrupinovým elementom SHELL43 nadefinujte explicitný súradnicový systém elementov nasledovne - pre elementy v rovine X = 15 systém č.11, v rovine Y = 3 systém č.12 a v rovine Z = 6 systém č.13.

Riešenie :

```
CSYS
```

```

LOCAL,11,,,,,,,,90,90
LOCAL,12,,,,,,,,90
LOCAL,13,,
NSEL,S,LOC,X,15
ESLN,S,1
EMODIF,ALL,ESYS,11
NSEL,S,LOC,Y,3
ESLN,S,1
EMODIF,ALL,ESYS,12
NSEL,S,LOC,Z,6
ESLN,S,1
EMODIF,ALL,ESYS,13

```

Príklad 8.3

Vyselektujte elementy konštrukcie z oblasti súradníc $-10 \leq x \leq 20$ a $25 \leq y \leq 42$ a $0 \leq z \leq 22$.

Riešenie :

```

NSEL,S,LOC,X,-10,20      ! Vyselektovanie uzlov v intervale  $-10 \leq x \leq 20$ 
NSEL,R,LOC,Y,25,42      ! Vyselektovanie uzlov v intervale  $25 \leq y \leq 42$ 
NSEL,R,LOC,Z,0,22       ! Vyselektovanie uzlov v intervale  $0 \leq z \leq 22$ 
ESLN,S,1                 ! Vyselektovanie prvkov s vyselektovanými uzlami

```

Príklad 8.4

Vyselektujte elementy konštrukcie uzlov od 12 do 550.

Riešenie :

```

NSEL,S,NODE,,12,550      ! Vyselektovanie uzlov od 12 do 550
ESLN,S,1                 ! Vyselektovanie prvkov s vyselektovanými uzlami

```

Príklad 8.5

Vyselektujte elementy konštrukcie uzlov odselektovaním uzlov so súradnicami $15 \leq z \leq 100$.

Riešenie :

```

ALLSEL
NSEL,U,LOC,Z,15,100      ! Odselektovanie uzlov od 15 do 100
ESLN,S,1                 ! Vyselektovanie prvkov s vyselektovanými uzlami

```

Príklad 8.6

Vyselektujte elementy pre materiál č.1 a im odpovedajúce uzly

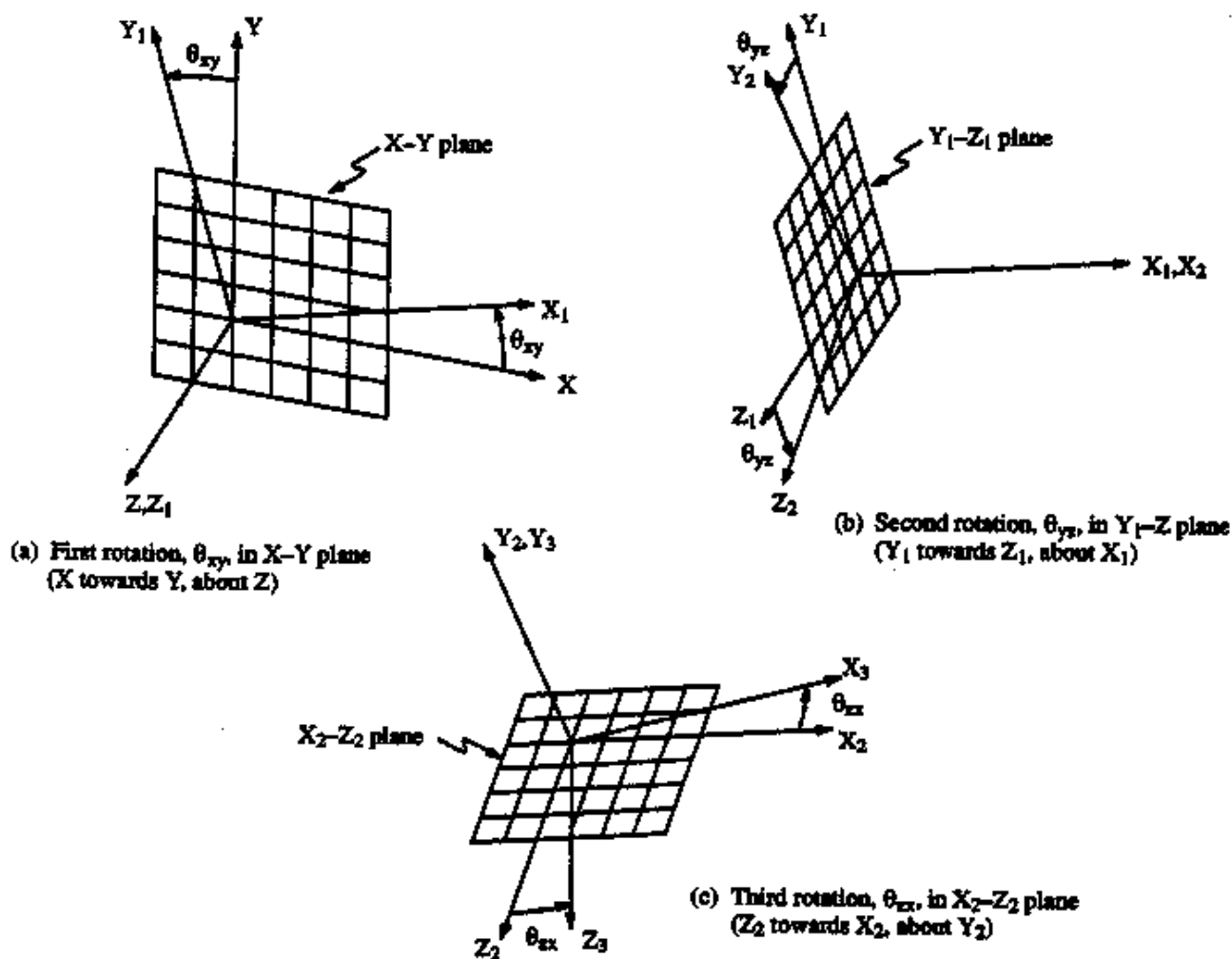
Riešenie :

```

ESEL,S,MAT,,1            ! Vyselektovanie prvkov z materiálu č.1

```

Pre uľahčenie generovania v rôznych rovinách je výhodné si definovať pracovnú rovinu príkazom CSWPLA.



Obr.8.2

Príklad 8.6

Definujte pracovnú rovinu v lokálnom súradnicovom systéme č.11, ktorého os Z je totožná s osou X globálneho súradnicového systému. Vyselektujte všetky prvky v tejto rovine.

Riešenie :

CSYS
LOCAL, 11, , , , , 90, 90

CSWPLA, 11
 NSEL, S, LOC, Z, 0
 ESLN, S, 1

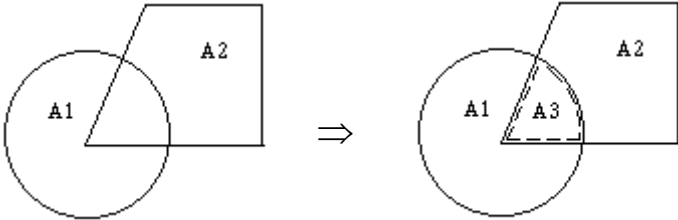
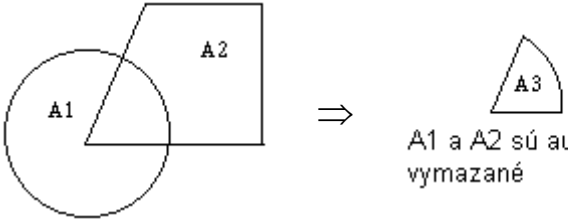
8.2.2 Generovanie telesa pomocou booleovských operácií

Solid modeling

Booleovské operácie

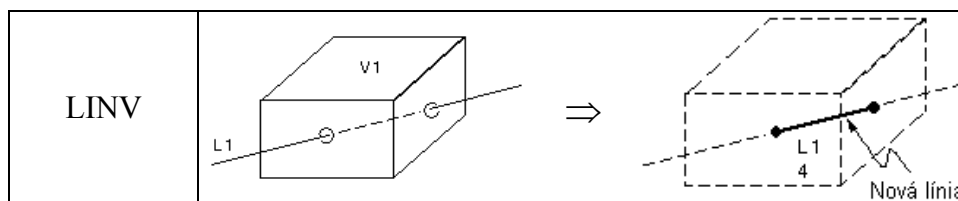
	Línia (Line)	Plocha (Area)	Objem (Volume)
Línia (Line)	LCSL, LGLUE LINL, LINP LOVLAP, LPTN LSBL	LINA LSBA	LINV LSBV
Plocha (Area)	ASBL	AADD, AGLUE AINA, AINP AOVLAP, APTN ASBA	AINV ASBV
Objem (Volume)		VSBA	VADD, VGLUE VINP, VINV VOVLAP, VSBV

Booleovské operácie – pôvodné a nové entity

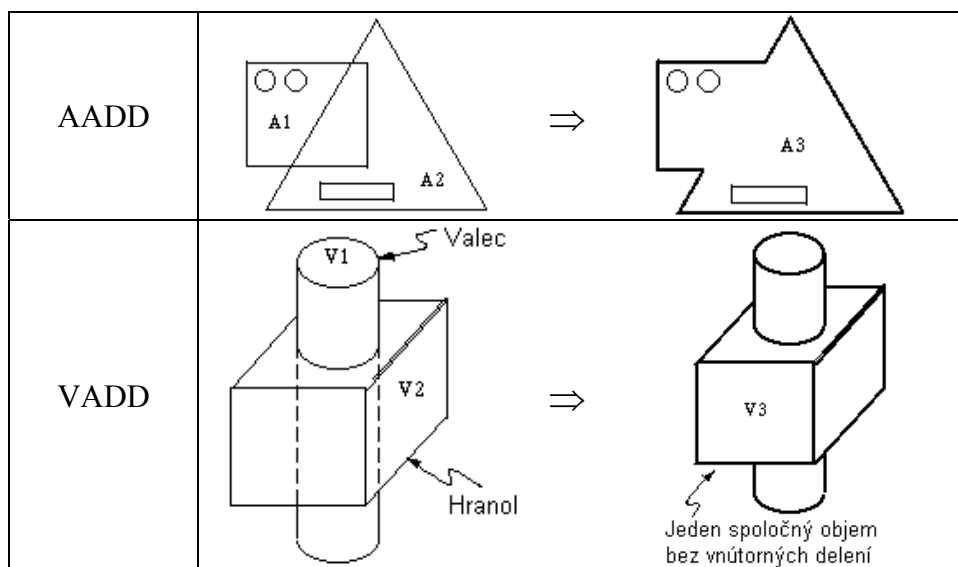
BOPTN,KEEP,YES AINA,1,2	 A1 a A2 sú nezmenené
BOPTN,KEEP,NO AINA,1,2	 A1 a A2 sú automaticky vymazané

Operácie prieniku (intersection)

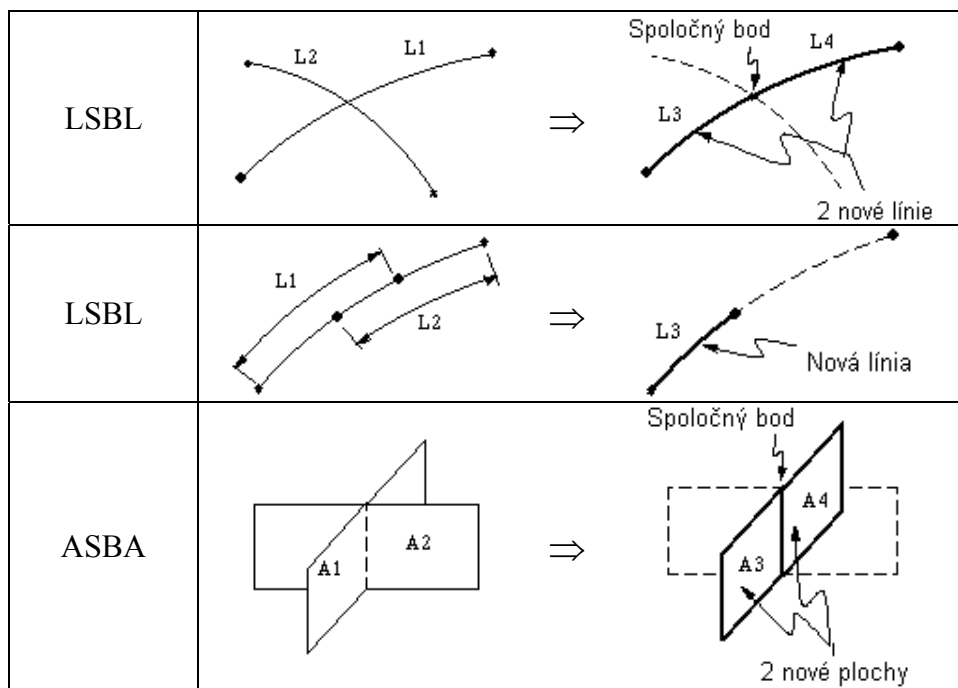
LINL	
LINL	
AINA	
AINA	
VINV	
VINV	
LINA	
LINA	
AINV	



Operácie pridávania (add)



Operácie odčítania (subtract)



ASBA	Nová plocha
VSbv	Nový objem
LSBA	Spoločný bod 2 nové línie
LSBA	Nová línia
LSBV	Spoločný bod 2 nové línie
LSBV	2 nové línie
ASBV	Nová plocha

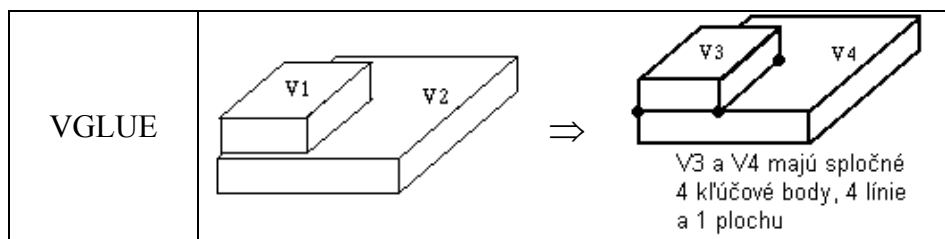
ASBL	
VSBA	

Operácie prekrývania (overlap)

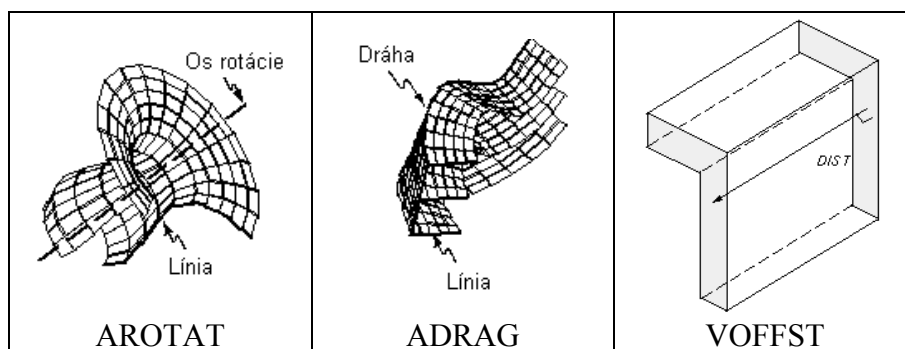
LOVLAP	
AOVLAP	
VOVLAP	

Operácie spájania (glue)

LGLUE	
AGLUE	



Vytvorenie plôch a objemov pomocou jednoduchších entít



8.3 Riešič

Riešič v systéme ANSYS je určený na definovanie okrajových podmienok, zaťaženia, atribútov riešenia, vrátane zvolenej výpočtovej metódy a samotné riešenie úlohy.

Do riešiča v systéme ANSYS sa vchádza príkazom **/SOLU** a vychádza z neho príkazom **FINISH**. Okrajové podmienky sa zadávajú pomocou príkazu **D**. Rôzne typy zaťaženia, ktoré je možné definovať ukazuje Tab.4.1. Jednotlivé zaťažovacie stavy sa zapisujú príkazom **LSWRITE**. Pred definovaním ďalšieho zaťažovacieho stavu je nevyhnutné vymazať všetko zaťaženie, týkajúce sa predchádzajúceho zaťažovacieho stavu.

Tab.4.1

Zaťaženie		Príkazy programu ANSYS pre		
Názov	(Name)	vytvorenie	výpis	vymazanie
Premiestnenie	(Displacement)	D	DLIST	DDELE
Sila - moment	(Force)	F	FLIST	FDELE
Povrchové sily	(Surface)	SFE	SFELIST	SFEDEL
Povrchové sily nosníka	(Surface on beam)	SFBEAM	SFELIST	SFEDEL
Teplota	(Temperature)	BFE	BFELIST	BFEDEL
Zrýchlenie	(Acceleration)	ACEL	–	–

Základné typy operácií :

➤ *Statická analýza – jediný zat'azovací stav*

```
/SOLU
D,...          ! Definovanie okrajových podmienok
F,...          ! Definovanie zatazenia
SAVE           ! Uloženie databázy do súboru Job.db
CDWRITE        ! Uloženie databázy do ASCII súboru Job.cdb
ANTYPE,STATIC  ! Definovanie typu analýzy
SOLVE          ! Riešenie
FINISH
```

➤ *Statická analýza – viaceré zat'azovacie stavy*

```
/SOLU
F,...          ! 1. zatazovací stav - definovanie zatazenia
D,...          ! 1. zatazovací stav - definovanie okrajových podmienok
LSWRITE,1      ! 1. zatazoveci stav - ulozenie
FDELETE,...    ! 1. zatazovací stav - vymazanie zatazenia
F,...          ! N. zatazovací stav - definovanie zatazenia
D,...          ! N. zatazovací stav - definovanie okrajových podmienok
LSWRITE,N      ! N. zatazovací stav - ulozenie
FDELETE,...    ! N. zatazovací stav - vymazanie zatazenia
ANTYPE,STATIC  ! Definovanie typu analýzy
LSSOLV,1,N     ! Riešenie 1. až N. zatazovacieho stavu
FINISH
```

➤ *Modálna analýza*

```
/SOLU
D,...          ! Okrajové podmienky
M,...          ! "masters" stupne voľnosti (MDOF)
ANTYPE,MODAL   ! Definovanie typu analýzy
MODEOPT,...    ! Voľba metódy modálnej analýzy a počtu tvarov
MXPAND,...     ! Expandovanie vlastných tvarov
SOLVE          ! Riešenie
FINISH
```

➤ *Analýza odozvy na harmonické zat'azenie*

```
/SOLU
D,...          ! Okrajové podmienky
F,...          ! Harmonické zatazenie
M,...          ! "masters" stupne voľnosti (MDOF)
ANTYPE,HARMIC  ! Definovanie typu analýzy
HROPT,...      ! Voľba metódy analýzy odozvy na harmonické
zatazenie
NSUBST,...     ! Počet krokov
HARFRQ,...     ! Frekvenčný rozsah analýzy
DMPRAT,...     ! Pomer útlmu
MDAMP,...      ! Modálny útlm
SOLVE          ! Riešenie
FINISH

/SOLU
EXPAS,ON       ! Expandovanie riešenia
EXPSOL,...     ! Expandovanie jedného kroku riešenia
HREXP,...      ! Fázový uhol
SOLVE          ! Riešenie
FINISH
```

➤ Analýza odozvy na všeobecné zaťaženie

```
/SOLU
D,...           ! Okrajové podmienky
M,...           ! "masters" stupne voľnosti (MDOF)
ANTYPE,TRANS    ! Definovanie typu analýzy
TRNOPT,...       ! Voľba metódy analýzy odozvy na všeobecné
zaťaženie
DELTIM,...       ! Časový krok
F,...           ! Zaťaženie na začiatku 1.kroku (v čase T=0)
SOLVE           ! Riešenie kroku
F,...           ! Zaťaženie na začiatku 2.kroku
TIME,...         ! Dĺžka časového intervalu, v ktorom pôsobí sila
SOLVE           ! Riešenie kroku
:
F,...           ! Zaťaženie na začiatku N.kroku
TIME,...         ! Dĺžka časového intervalu, v ktorom pôsobí sila
SOLVE           ! Riešenie kroku
FINISH

/SOLU
EXPAS,ON         ! Expandovanie riešenia
EXPSOL,...       ! Expandovanie jedného kroku riešenia
SOLVE           ! Riešenie
FINISH
```

➤ Spektrálna analýza

```
/SOLU
D,...           ! Okrajové podmienky
M,...           ! "masters" stupne voľnosti (MDOF)
ANTYPE,MODAL     ! Modálna analýza
MODEOPT,...       ! Voľba metódy modálnej analýzy a počtu tvarov
MXPAND,...       ! Expandovanie vlastných tvarov
SOLVE           ! Riešenie
FINISH

/SOLU
ANTYPE,SPECTR    ! Spektrálna analýza
SPOPT,...        ! Voľba metódy spektrálnej analýzy
SED,...          ! Smer spektra
SVTYPE,...       ! Typ spektra
FREQ,...         ! Tab. frekvencia/spektrálna hodnota - frekvencia
SV,...          ! Tab. frekvencia/spektrálna hodnota - spektrálna
hodnota
SOLVE           ! Riešenie
*GET,mcf1,MODE,1,MCOEF ! Koeficient pre 1.vlastný frekvenciu
FINISH

/POST1
SET,1,1,mcf1      ! Načítanie riešenia s koef. pre 1.vlastnú
frekvenciu
:
FINISH
```

Typ riešiča sa v úlohách definuje príkazom **ANTYPE**, ktorého štruktúra je nasledovná :

ANTYPE, *Antype*, *Status*

Parameter *Antype* definuje typ zvolenej analýzy a parameter *Status* označuje či sa jedná o novú analýzu alebo o opakovaný výpočet pre nové zaťaženie.

Antype – STATIC – statická analýza

BUCKLE – lineárna a nelineárna stabilita

MODAL – modálna analýza

HARMIC – odozva na harmonické kmitanie

TRANS – odozva na neharmonické kmitanie v čase

SUBSTR – riešenie metódou podkonštrukcií

SPECTR – spektrálna analýza

Status – NEW – nový typ analýzy

REST – opakovaný výpočet

Súbor príkazov pre ten ktorý typ výpočtu je popísaný v ďalších kapitolách.

Príklad 4.1

Vyriešte konštrukciu namodelovanú v Príklade 8.1, ak je zaťažená jedinou silou F a stĺpy rámu sú votknuté.

Riešenie:

```
/SOLU
D,1,ALL           ! Votknutie v uzle č.1
D,2,ALL           ! Votknutie v uzle č.2
F,3,FX,10         ! Vodorovná sila v uzle č.3
SAVE              ! Uloženie databázy do súboru
CDWRITE           ! Uloženie databázy do ASCII súboru
ANTYPE,STATIC     ! Statická analýza
SOLVE             ! Riešenie
FINISH
```

8.4 Postprocesor

Postprocesor predstavuje súbor operácií, ktorých cieľom je zobrazit' výsledky riešenia, ako v numerickom tvare tak v grafickom tvare. Získané výsledky sa dajú podľa potreby ďalej spracovať, napr. vytvoriť kombinácie rôznych riešení, animovať vlastné tvary z modálnej analýzy a pod.

V systéme ANSYS sa nachádzajú dva typy postprocesora:

➤ **General Postprocessor** – spracováva výsledky zo statickej analýzy

➤ **Time Hist Postprocessor** – spracováva výsledky z dynamickej analýzy

Do postprocesora v systéme ANSYS sa vchádza príkazom **/POST1** (General Postprocessor) alebo **/POST26** (Time Hist Postprocessor) a vychádza z neho príkazom **FINISH**. Výsledky riešenia sa načítajú príkazom **SET**. V prípade, že sú k dispozícii výsledky

z viacerých zaťažovacích stavov, sa tieto načítajú príkazom **SET**, *Lstep* (*Lstep* je číslo zaťažovacieho stavu, ktorý chceme načítať).

Získané výsledky sa dajú zobraziť buď v numerickom alebo grafickom formáte. Výsledky sa môžu zobrazovať buď na obrazovke monitora, alebo môžu byť presmerované do súboru. Prehľad niektorých základných príkazov obsahuje Tab.5.1.

Tab.5.1

Výsledné veličiny		Príkazy	
Názov	(Name)	výpisu	vykreslenia
Reakcie v uzloch	(Reaction nodal solution)	PRRSOL	–
Veličiny v uzloch	(Nodal solution)	PRNSOL	PLNSOL
Veličiny na prútoch	(Line element solution)	–	PLLS
Veličiny na prvkoch	(Element solution)	PRESOL	PLESOL
Veličiny v tabuľkách	(Element table items)	PRETAB	PLETAB
Veličiny v rezoch	(Path results)	PRPATH	PLPATH
Veličiny vektorové	(Results as vector)	PRVECT	PLVECT

Základné typy operácií:

➤ Načítanie výsledkov z jediného zaťažovacieho stavu

```
/POST1
SET                ! Načítanie výsledkov
...                ! Spracovanie výsledkov
FINISH
```

➤ Načítanie výsledkov z viacerých zaťažovacích stavov

```
/POST1
SET,1              ! 1.zaťažovací stav - načítanie výsledkov
...                ! 1.zaťažovací stav - spracovanie výsledkov
SET,N              ! N.zaťažovací stav - načítanie výsledkov
...                ! N.zaťažovací stav - spracovanie výsledkov
FINISH
```

➤ Presmerovanie výstupov

```
/POST1
SET                ! Načítanie výsledkov
...                ! Spracovanie výsledkov
/OUTPUT,name,ext   ! Presmerovanie textového výstupu do súboru
"name.ext"
...                ! Príkazy pre výpis výsledkov
/OUTPUT            ! Presmerovanie textového výstupu späť na obrazovku
/SHOW,name,grp     ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"name.grp"
...                ! Príkazy pre vykreslenie výsledkov
/SHOW,TERM         ! Presmerovanie grafického výstupu späť na
obrazovku
FINISH
```

Príklad 5.1:

Pre konštrukciu namodelovanú v Príklade 8.1 a vyriešenú v Príklade 4.1 spracujte výsledky pre textový aj grafický výstup.

Riešenie:

```

/POST1
SET                                ! Načítanie výsledkov riešenia
ETABLE,n1,SMIS,1                   ! Osová sila na začiatku prúta
ETABLE,n2,SMIS,7                   ! Osová sila na konci prúta
ETABLE,t1,SMIS,2                   ! Priečna sila na začiatku prúta
ETABLE,t2,SMIS,8                   ! Priečna sila na konci prúta
ETABLE,m1,SMIS,6                   ! Ohybový moment na začiatku prúta
ETABLE,m2,SMIS,12                  ! Ohybový moment na konci prúta
PRNSOL,DOF                         ! Výpis premiestnení uzlov (UX,UY,ROTZ)
PRRSOL                             ! Výpis reakcií
PRETAB                             ! Výpis vnútorných síl
/OUTPUT,ram,txt                   ! Presmerovanie textového výstupu do súboru
"ram.txt"
PRNSOL,DOF                         ! Výpis premiestnení uzlov (UX,UY,ROTZ)
PRRSOL                             ! Výpis reakcií
PRETAB                             ! Výpis vnútorných síl
/OUTPUT                           ! Presmerovanie textového výstupu späť na obrazovku
PLDISP                             ! Vykreslenie deformovaného tvaru rámu
PLLS,n1,n2                         ! Vykreslenie osových síl
PLLS,t1,t2                         ! Vykreslenie priečných síl
PLLS,m1,m2                         ! Vykreslenie ohybových momentov
/SHOW,ram,grp                     ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"ram.grp"
PLDISP                             ! Vykreslenie deformovaného tvaru rámu
PLLS,n1,n2                         ! Vykreslenie osových síl
PLLS,t1,t2                         ! Vykreslenie priečných síl
PLLS,m1,m2                         ! Vykreslenie ohybových momentov
/SHOW,TERM                       ! Presmerovanie grafického výstupu späť na
obrazovku
FINISH

```

8.5 Jazyk APDL

Riešenie konštrukcií v ANSYS-e je možné urýchliť a zefektívniť používaním makier. **Makro** je textový súbor s príponou MAC. V makre sú zapísané príkazy systému ANSYS v poradí, v akom sa majú vykonať. V niektorých prípadoch však nevystačíme iba s príkazmi ANSYS-u, ale je potrebné proces vykonávania príkazov riadiť alebo priamo získavať informácie o modeli konštrukcie a na ich základe rozhodovať o ďalšom postupe výpočtu.

Jazyk APDL (Ansys Parametric Design Language) predstavuje prostriedok, ktorý umožňuje riešiť vyššie popisované problémy. Obsahuje príkazy priradenia, cyklu, vetvenia, čítania a zápisu parametrov, zápisu do súboru a pod. Podrobnejšie sú popísané najčastejšie používané príkazy.

➤ **Priradenie** – do premennej sa priradí číselná alebo textová hodnota. Meno premennej sa nesmie zhodovať s názvom príkazu systému ANSYS.

Príklad 6.1:

```
uloha='Vypocet'      ! Priradenie hodnoty 'Vypocet' do textovej
premennej uloha
b1=0.4               ! Priradenie hodnoty 0.4 do číselnej premennej b1
h1=0.6               ! Priradenie hodnoty 0.6 do číselnej premennej h1
```

➤ **Operácie s premennými** – s nadefinovanými premennými môžeme vykonávať bežné matematické operácie (+,-,*,/), umocnenie (**), používať ich ako parametre funkcií SIN(x), COS(x), TAN(x), SQRT(x), ABS(x) a môžeme ich použiť aj ako parametre príkazov ANSYSu.

Príklad 6.2:

```
/TITLE,%uloha%      ! Požitie textovej premennej ('Vypocet') ako
parametra
A1=b1*h1             ! Operácie s číselnými premennými (výpočet A1)
IZ1=(b1*h1**3)/12    ! Operácie s číselnými premennými (výpočet IZ1)
R,1,A1,IZ1,h1        ! Použitie číselnej premennej ako parametra príkazu
R
```

➤ **Výpis premenných** – obsah nadefinovaných premenných je možné vypísať príkazom ***STATUS**

➤ **Príkaz cyklu** – ak sa nejaký blok príkazov opakuje, príkaz cyklu zabezpečí jeho niekoľkonásobné vykonanie. Cyklus je uzavretý medzi príkazy ***DO** a ***ENDDO**.

***DO, Par, IVAL, FVAL, INC**

Par – parameter cyklu

IVAL – počiatočná hodnota, ktorú nadobudne *Par*

FVAL – konečná hodnota

INC – prírastok

Príklad 6.3:

```
*DO, J, 2, 10, 2      ! Cyklus: J nadobúda hodnoty 2, 4, 6, 8 a 10
                     ! Príkazy, ktoré sa majú vykonať v rámci cyklu
*ENDDO               ! Koniec cyklu
```

➤ **Príkaz vetvenia** – príkazy sa vykonávajú ak je splnená podmienka. Vetvenie je uzavreté medzi príkazy ***IF** a ***ENDIF**.

***IF, VAL1, Oper, VAL2, Base**

VAL1 – 1. hodnota

Oper – logická operácia medzi hodnotami ako napr.:

EQ (Val1=Val2) LT (Val1<Val2) GT (Val1>Val2)

NE (Val1≠Val2) LE (Val1≤Val2) GE (Val1≥Val2)

VAL2 – 2. hodnota

Base – vykonávaná akcia ako napr.

:label – skok na riadok s návěstím :label

STOP – ukončenie vykonávania príkazov a ukončenie ANSYSu

THEN – if-then-else konštrukcia

Príklad 6.4:

```
*IF, J, EQ, K, THEN      ! Ak J=K, vykonajú sa nasledovné príkazy
...                      ! Príkazy
*ENDIF                  ! Koniec vetvenia
```

Príklad 6.5:

```
*IF, J, EQ, K, THEN      ! Ak J=K, vykonajú sa nasledovné príkazy
...                      ! Príkazy
*ELSEIF, J, EQ, L        ! Ak J=L, vykonajú sa nasledovné príkazy
...                      ! Príkazy
*ELSEIF, J, EQ, M        ! Ak J=M, vykonajú sa nasledovné príkazy
...                      ! Príkazy
*ELSE                    ! V ostatných prípadoch sa vykonajú nasledovné príkazy
...                      ! Príkazy
*ENDIF                  ! Koniec bloku vetvenia
```

➡ **Získanie parametrov modelu** – všetky údaje o modeli, zaťažení a výsledkoch riešenia je možné získať pomocou príkazu ***GET**. Niekedy je možné príkaz ***GET** nahradiť ekvivalentnou funkciou, čo značne zjednodušuje zápis.

***GET, Par, Entity, ENTNUM, Item1, IT1NUM**

Par – názov premennej, do ktorej bude uložená hodnota

Entity – názov entity, o ktorej sa získavajú informácie (NODE, ELEM, KP, LINE, AREA, VOLU, ...)

ENTNUM – číslo entity

Item1 – partikulárne meno entity

IT1NUM – číslo špecifikácie entity Item1

Cez príkaz ***GET** je dostupné veľké množstvo informácií o konštrukcii. V príkladoch je uvedený iba zlomok možností príkazu ***GET**. Do premených s názvom definovaným užívateľom Par1 až Par19 budú priradené hodnoty, uvedené v komentári za výkričníkom.

Príklad 6.6:

*GET, Par1, NODE, 0, COUNT	! Par1 = celkový počet uzlov konštrukcie
*GET, Par2, NODE, 0, NUM, MIN	! Par2 = najmenšie číslo uzla
*GET, Par3, NODE, 0, NUM, MAX	! Par3 = najväčšie číslo uzla
*GET, Par4, NODE, 10, LOC, X	! Par4 = X-súradnica uzla číslo 10
*GET, Par5, NODE, 10, LOC, Y	! Par5 = Y-súradnica uzla číslo 10
*GET, Par6, NODE, 10, LOC, Z	! Par6 = Z-súradnica uzla číslo 10

alebo alternatívne príkazy typu

Par4=NX(10)	! Par5 = X-súradnica uzla číslo 10
Par5=NY(10)	! Par6 = Y-súradnica uzla číslo 10
Par6=NZ(10)	! Par7 = Z-súradnica uzla číslo 10

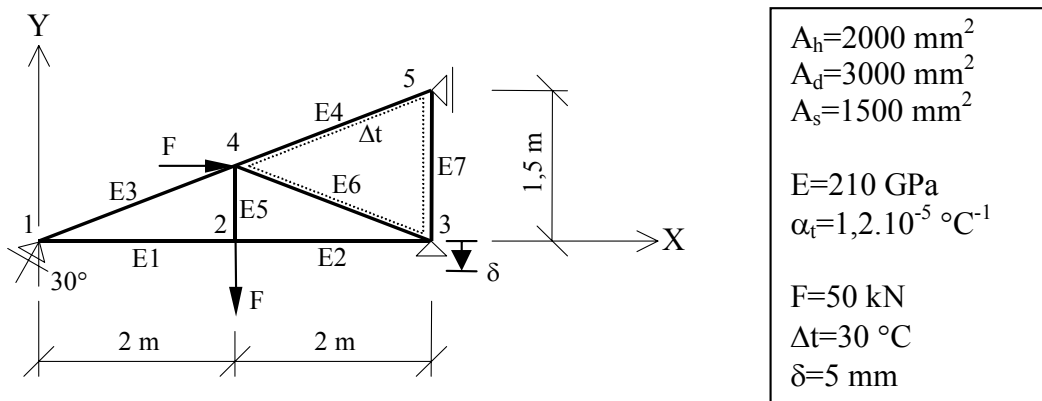
*GET, Par10, ELEM, 0, COUNT	! Par10 = celkový počet prvkov konštrukcie
*GET, Par11, ELEM, 0, NUM, MIN	! Par11 = najmenšie číslo prvku
*GET, Par12, ELEM, 0, NUM, MAX	! Par12 = najväčšie číslo prvku
*GET, Par13, ELEM, 45, NODE, 5	! Par13 = číslo 5.uzla prvku číslo 45
*GET, Par14, ELEM, 45, ATTR, TYPE	! Par14 = typ prvku číslo 45
*GET, Par15, ELEM, 45, ATTR, MAT	! Par15 = materiál prvku číslo 45
*GET, Par16, ELEM, 45, ATTR, REAL	! Par16 = reálna konštanta prvku číslo 45
*GET, Par17, ELEM, 84, LENG	! Par17 = dĺžka prútového prvku číslo 84
*GET, Par18, ELEM, 26, AREA	! Par18 = plocha plošného prvku číslo 26
*GET, Par19, ELEM, 45, VOLU	! Par19 = objem objemového prvku číslo 45

9. STATIKA V SYSTÉME ANSYS

V tejto kapitole uvádzame základné typy úloh riešenia priebehu vnútorných síl od statického zaťaženia na prútových, rámových, stenových a škrupinových konštrukciách.

9.1 Priehradová konštrukcia

Na rovinnej priehradovej konštrukcii vyriešte premiestnenia, reakcie a prierezové sily od účinkov silového zaťaženia (F), teplotného zaťaženia (Δt) a nepružného premiestnenia podpery (δ). Konštrukcia je z ocele, pričom prierezová plocha horného pása je A_h , dolného pása A_d a stĺpikov a diagonál A_s .



Na riešenie konštrukcie je použitý typ prvku LINK1, ktorý umožňuje definovať v každom uzle horizontálny a vertikálny posun UX a UY. Všetky fyzikálne jednotky prevedieme na kN, kPa, m.

Riešenie príkladu je uvedené tromi spôsobmi. Prvý spôsob je vpisovaním príkazov do okna „Input Line“. Príkaz sa po stlačení klávesu „Enter“ okamžite vykoná. Tento postup vyžaduje dobrú znalosť syntaxe príkazov a významu ich parametrov.

Druhý spôsob využíva GUI (Graphics User Interface) systému ANSYS. Jednotlivé príkazy sú zadávané pomocou dialógových okien, do ktorých sú vpisované parametre príkazov. Príkazy sú vykonávané po stlačení tlačidla „OK“ alebo „Apply“.

Tretí spôsob využíva zápis príkazov do makra. Všetky príkazy sú zapísané do ASCII súboru s názvom MENO.MAC. Prípona MAC je povinná. Potom stačí v okne „Input Line“ zapísať iba MENO a obsah súboru MENO.MAC sa postupne príkaz po príkaze vykoná.

9.1.1 Výpočet pomocou príkazov v okne „Input Line“

```
/TITLE,Priehradova konstrukcia

/PREP7                      ! Štartovanie preprocesora

ET,1,LINK1                  ! Typ prvku č.1
ETLIST                      ! Výpis typov prvkov

R,1,0.003                   ! Prierez č.1 - plocha dolného pásu
R,2,0.002                   ! Prierez č.2 - plocha horného pásu
R,3,0.0015                  ! Prierez č.3 - plocha diagonál
RLIST ! Výpis prierezových charakteristík

MP,EX,1,210e6               ! Materiál č.1 - modul pružnosti
MP,ALPX,1,1.2e-5            ! Materiál č.1 - súčiniteľ teplotnej rozťažnosti
MPLIST                      ! Výpis materiálových charakteristík

N,1,0,0,, -30              ! Uzol č.1 - súradnice X a Y s pootočením uzla o 30°
N,2,2,0                     ! Uzol č.2 - súradnice X a Y
N,3,4,0                     ! Uzol č.3 - súradnice X a Y
N,4,2,0.75                 ! Uzol č.4 - súradnice X a Y
N,5,4,1.5                  ! Uzol č.5 - súradnice X a Y
NLIST ! Výpis uzlov a ich súradníc
NPLOT,1                    ! Vykreslenie uzlov s očíslovaním

TYPE,1                     ! Dolný pás - typ prvku č.1
MAT,1 ! Dolný pás - materiál č.1
REAL,1                     ! Dolný pás - prierez č.1
E,1,2 ! Dolný pás - prvok č.1 s uzlami č.1 a č.2
E,2,3 ! Dolný pás - prvok č.2 s uzlami č.2 a č.3
TYPE,1                     ! Horný pás - typ prvku č.1
MAT,1 ! Horný pás - materiál č.1
REAL,2                     ! Horný pás - prierez č.2
E,1,4 ! Horný pás - prvok č.3 s uzlami č.1 a č.4
E,4,5 ! Horný pás - prvok č.4 s uzlami č.4 a č.5
TYPE,1                     ! Diagonály - typ prvku č.1
MAT,1 ! Diagonály - materiál č.1
REAL,3                     ! Diagonály - prierez č.3
E,2,4 ! Diagonály - prvok č.5 s uzlami č.2 a č.4
E,3,5 ! Diagonály - prvok č.6 s uzlami č.3 a č.5
E,4,3 ! Diagonály - prvok č.7 s uzlami č.4 a č.3
ELIST ! Výpis prvkov a ich vlastností
EPLOT ! Vykreslenie prvkov
/PNUM,REAL,1               ! Nastavenie vykresľovania prvkov podľa reálnych
konštánt
EPLOT ! Vykreslenie prvkov

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
CDWRITE                     ! Zápis do ASCII súboru typu CDB
FINISH                     ! Ukončenie preprocesora

/SOLU ! Štartovanie solvera

D,1,UY                     ! Podopretie v uzle č.1 v smere Y
D,5,UX                     ! Podopretie v uzle č.5 v smere X
D,3,UY                     ! Podopretie v uzle č.3 v smere Y
DLIST ! Výpis okrajových podmienok
```

```

! 1. ZAŤAŽOVACÍ STAV
F,2,FY,-50      ! Sila v uzle č.2 v smere -Y
F,4,FX,50       ! Sila v uzle č.4 v smere X
FLIST ! Výpis silových zatažení
LSWRITE,1       ! Zápis 1.zatažovacieho stavu
FDELETE,ALL,ALL ! Vymazanie silového zataženia
FLIST ! Výpis silových zatažení (zataženie už neexistuje)

! 2. ZAŤAŽOVACÍ STAV
BFE,4,TEMP,,30  ! Teplota na prvku č.4
BFE,6,TEMP,,30  ! Teplota na prvku č.6
BFE,7,TEMP,,30  ! Teplota na prvku č.7
BFELIST         ! Výpis teplotných zatažení
LSWRITE,2       ! Zápis 2.zatažovacieho stavu
BFDELETE,ALL,ALL ! Vymazanie teplotného zataženia
BFELIST         ! Výpis teplotných zatažení (zataženie už
neexistuje)

! 3. ZAŤAŽOVACÍ STAV
D,3,UY,-0.005   ! Premiestnenie podpery v uzle č.3 v smere -Y
DLIST ! Výpis okrajových podmienok (prejaví sa pokles podpory)
LSWRITE,3       ! Zápis 3.zatažovacieho stavu
D,3,UY          ! Vymazanie poklesu podpery (pokles = 0)
DLIST ! Výpis poklesov podpery (pokles už neexistuje)

SAVE ! Uloženie do súboru
LSSOLVE,1,3     ! Riešenie 1. až 3.zatažovacieho stavu
FINISH          ! Ukončenie solvera

/POST1          ! Štartovanie postprocesora

SET,1 ! Načítanie výsledkov riešenia 1.zatažovacieho stavu
ETABLE,n1,SMIS,1 ! Výpočet osových síl
PLDISP,2        ! Vykreslenie posunov
PLLS,n1,n1      ! Vykreslenie osových síl
PRNSOL,U        ! Výpis posunov uzlov
PRRSOL          ! Výpis reakcií
PRETAB,n1       ! Výpis osových síl
/OUTPUT,stav1,txt ! Presmerovanie výstupu do súboru "stav1.txt"
PRNSOL,U        ! Výpis posunov uzlov do súboru "stav1.txt"
PRRSOL          ! Výpis reakcií do súboru "stav1.txt"
PRETAB,n1       ! Výpis osových síl do súboru "stav1.txt"
/OUTPUT         ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku

SET,2 ! Načítanie výsledkov riešenia 2.zatažovacieho stavu
ETABLE,n2,SMIS,1 ! Výpočet osových síl
PLDISP,2        ! Vykreslenie posunov
PLLS,n2,n2      ! Vykreslenie osových síl
PRNSOL,U        ! Výpis posunov uzlov
PRRSOL          ! Výpis reakcií
PRETAB,n2       ! Výpis osových síl
/OUTPUT,stav2,txt ! Presmerovanie výstupu do súboru "stav2.txt"
PRNSOL,U        ! Výpis posunov uzlov do súboru "stav2.txt"
PRRSOL          ! Výpis reakcií do súboru "stav2.txt"
PRETAB,n2       ! Výpis osových síl do súboru "stav2.txt"
/OUTPUT         ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku

SET,3 ! Načítanie výsledkov riešenia 3.zatažovacieho stavu
ETABLE,n3,SMIS,1 ! Výpočet osových síl
PLDISP,2        ! Vykreslenie posunov
PLLS,n3,n3      ! Vykreslenie osových síl

```

```

PRNSOL,U          ! Výpis posunov uzlov
PRRSOL           ! Výpis reakcií
PRETAB,n3        ! Výpis osových síl
/OUTPUT,stav3.txt ! Presmerovanie výstupu do súboru "stav3.txt"
PRNSOL,U          ! Výpis posunov uzlov do súboru "stav3.txt"
PRRSOL           ! Výpis reakcií do súboru "stav3.txt"
PRETAB,n3        ! Výpis osových síl do súboru "stav3.txt"
/OUTPUT          ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku

FINISH           ! Ukončenie postprocesora
/EXIT ! Ukončenie práce v ANSYS

```

9.1.2 Výpočet v interaktívnom režime pomocou GUI

Krok1: Definovanie typu prvku

1. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete*. Zobrazí sa okno Element Types.
2. Kliknúť na Add. Zobrazí sa okno Library of Elements.
3. V ľavom rolovacom okne zvoliť Structural Link. V pravom rolovacom okne zvoliť 2D spar. Kliknúť na OK.
4. Kliknúť na Cancel v okne Element Types.
5. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Properties > Element Types*. Zobrazí sa okno s výpisom typov prvkov. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.

Krok 2: Definovanie prierezov

1. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > Real Constants*. Zobrazí sa okno Real Constants.
2. Kliknúť na Add. Zobrazí sa okno Element Type for Real Constants.
3. V rolovacom okne zvoliť Type 1 Link1. Kliknúť na OK. Zobrazí sa okno Real Constants for LINK1.
4. Vyplniť položku Set No. hodnotou 1 a položku AREA hodnotou 0.003. Kliknúť na Apply.
5. Vyplniť položku Set No. hodnotou 2 a položku AREA hodnotou 0.002. Kliknúť na Apply.
6. Vyplniť položku Set No. hodnotou 3 a položku AREA hodnotou 0.0015. Kliknúť na OK.
7. Kliknúť na Close v okne Real Constants.
8. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Properties > All Real Constants*. Zobrazí sa okno s výpisom prierezov. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.

Krok 3: Definovanie materiálu

1. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > Material Props > -Constant- Isotropic*. Zobrazí sa okno Constant Isotropic Material.
2. Vyplniť položku material na 1. Kliknúť na OK. Zobrazí sa okno Isotropic Material Properties.
3. Vyplniť položku EX hodnotou 210e6 a položku ALPX hodnotou 1.2e-5. Kliknúť na OK.
4. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Properties > All Materials*. Zobrazí sa okno s výpisom materiálov. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.

5. V okne ANSYS Toolbar kliknúť na SAVE_DB.

Krok 5: Uzly

1. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Nodes > In Active CS*. Zobrazí sa okno Create Nodes in Active Coordinate System.
2. Vyplniť položku NODE hodnotou 1, položky X,Y,Z hodnotami 0, 0, 0 a položku THXY hodnotou -30. Kliknúť na Apply.
3. Vyplniť položku NODE hodnotou 2, položky X,Y,Z hodnotami 2, 0, 0 a položku THXY vymazať. Kliknúť na Apply.
4. Vyplniť položku NODE hodnotou 3, položky X,Y,Z hodnotami 4, 0, 0. Kliknúť na Apply.
5. Vyplniť položku NODE hodnotou 4, položky X,Y,Z hodnotami 2, 0.75, 0. Kliknúť na Apply.
6. Vyplniť položku NODE hodnotou 5, položky X,Y,Z hodnotami 4, 1.5, 0. Kliknúť na OK.
7. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Nodes*. Zobrazí sa okno Sort Node Listing. Kliknúť OK. Otvorí sa okno s výpisom uzlov. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.
8. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > PlotCtrls > Numbering*. Zobrazí sa okno Plot Numbering Controls. Nastaviť položku NODE na On. Kliknúť na OK.
9. (Zvoliť menu *Utility Menu > Plot > Nodes*.)
10. V okne ANSYS Toolbar kliknúť na SAVE_DB.

Krok 6: Prvky

1. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Elements > Elem Attributes*. Zobrazí sa okno Element Attributes.
2. Vyplniť položku TYPE hodnotou 1, položku MAT hodnotou 1 a položku REAL hodnotou 1. Kliknúť na OK.
3. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Elements > -Auto Numbered- Thru Nodes*. Zobrazí sa pikovacie okno Elements from Nodes.
4. V okne ANSYS Graphics kliknúť na uzol č.1 a na uzol č.2. Kliknúť na Apply.
5. V okne ANSYS Graphics kliknúť na uzol č.2 a na uzol č.3. Kliknúť na OK.
6. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Elements > Elem Attributes*. Zobrazí sa okno Element Attributes.
7. Vyplniť položku REAL hodnotou 2. Kliknúť na OK.
8. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Elements > -Auto Numbered- Thru Nodes*. Zobrazí sa pikovacie okno Elements from Nodes.
9. V okne ANSYS Graphics kliknúť na uzol č.1 a na uzol č.4. Kliknúť na Apply.
10. V okne ANSYS Graphics kliknúť na uzol č.4 a na uzol č.5. Kliknúť na OK.
11. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Elements > Elem Attributes*. Zobrazí sa okno Element Attributes.
12. Vyplniť položku REAL hodnotou 3. Kliknúť na OK.
13. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > -Modeling- Create > Elements > -Auto Numbered- Thru Nodes*. Zobrazí sa pikovacie okno Elements from Nodes.
14. V okne ANSYS Graphics kliknúť na uzol č.2 a na uzol č.4. Kliknúť na Apply.
15. V okne ANSYS Graphics kliknúť na uzol č.3 a na uzol č.5. Kliknúť na Apply.
16. V okne ANSYS Graphics kliknúť na uzol č.4 a na uzol č.3. Kliknúť na OK.
17. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Elements > Nodes + Attributes*. Zobrazí sa okno s výpisom prvkov. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.

18. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > PlotCtrls > Numbering*. Zobrazí sa okno Plot Numbering Controls. Nastaviť položku Elem / Atrib numbering na Real Const num. Kliknúť na OK.
19. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > Plot > Elements*.
20. V okne ANSYS Toolbar kliknúť na SAVE_DB.

Krok 8: Archivácia modelu

1. Zvoliť menu *Main Menu > Preprocessor > Archive Model > Write*. Zobrazí sa okno Write Geometry/Loads for Archive.
2. Kliknúť na OK.

Krok 9: Okrajové podmienky

1. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Loads- Apply > -Structural- Displacement > On Nodes*. Zobrazí sa pikovacie okno Apply U,ROT on Nodes.
2. Kliknúť na uzol č.1. Kliknúť na Apply. Zobrazí sa okno Apply U,ROT on Nodes.
3. Zvoliť položku UY. Kliknúť na Apply.
4. Kliknúť na uzol č.3. Kliknúť na Apply. Zobrazí sa okno Apply U,ROT on Nodes.
5. Kliknutím zrušiť položku UY a zvoliť položku All DOF. Kliknúť na Apply.
6. Kliknúť na uzol č.5. Kliknúť na Apply. Zobrazí sa okno Apply U,ROT on Nodes.
7. Kliknutím zrušiť položku All DOF a zvoliť položku UX. Kliknúť na OK.
8. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Loads > DOF Constraints > On All Nodes*. Zobrazí sa okno s výpisom okrajových podmienok. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.
9. V okne ANSYS Toolbar kliknúť na SAVE_DB.

Krok 10: 1. zaťažovací stav – Silové zaťaženie

1. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Loads- Apply > Force/Moment > On Nodes*. Zobrazí sa pikovacie okno Apply F/N on Nodes.
2. Kliknúť na uzol č.2. Kliknúť na Apply. Zobrazí sa okno Apply F/M on Nodes.
3. Nastaviť v položke Lab hodnotu FY. Vyplniť položku VALUE hodnotou -50. Kliknúť na Apply.
4. Kliknúť na uzol č.4. Kliknúť na Apply. Zobrazí sa okno Apply F/M on Nodes.
5. Nastaviť v položke Lab hodnotu FY. Vyplniť položku VALUE hodnotou 50. Kliknúť na OK.
6. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Loads > Force > On All Nodes*. Zobrazí sa okno s výpisom silového zaťaženia. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.
7. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > Write LS file*. Zobrazí sa okno Load Step File.
8. Vyplniť položku LSNUM hodnotou 1. Kliknúť na OK.
9. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Loads- Delete > All Load Data > -All Forces- On All Nodes*. Zobrazí sa okno Delete All Forces on All Selected Nodes.
10. Kliknúť na OK.
11. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Loads > Force > On All Nodes*. Zobrazí sa okno bez výpisu silového zaťaženia. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.

Krok 11: 2. zaťažovací stav – Silové zaťaženie

1. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Loads- Apply > Temperature > On Elements*. Zobrazí sa pikovacie okno Apply TEMP on Elems.
2. Kliknúť na elementy č.4,6,7. Kliknúť na OK. Zobrazí sa okno Apply TEMP on Elems.

3. Vyplniť položku VAL1 hodnotou 30. Kliknúť na OK.
4. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Loads > Body Loads > On All Elements*. Zobrazí sa okno s výpisom teplotného zaťaženia. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.
5. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > Write LS file*. Zobrazí sa okno Load Step File.
6. Vyplniť položku LSNUM hodnotou 2. Kliknúť na OK.
7. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Loads- Delete > All Load Data > -All Body Loads- On All Elements*. Zobrazí sa okno Delete All Body Loads on All Selected Elements.
8. Kliknúť na OK.
9. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Loads > Body Loads > On All Elements*. Zobrazí sa okno bez výpisu teplotného zaťaženia. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.

Krok 12: 3. zaťažovací stav – Nepružné premiestnenie podpery

1. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Loads- Apply > -Structural- Displacement > On Nodes*. Zobrazí sa pikovacie okno Apply U,ROT on Nodes.
2. Kliknúť na uzol č.3. Kliknúť na OK. Zobrazí sa okno Apply U,ROT on Nodes.
3. Kliknutím zrušiť položku UX a zvoliť položku UY. Vyplniť položku VALUE hodnotou -0.005. Kliknúť na OK.
4. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Loads > DOF Constraints > On All Nodes*. Zobrazí sa okno s výpisom okrajových podmienok. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.
5. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > Write LS file*. Zobrazí sa okno Load Step File.
6. Vyplniť položku LSNUM hodnotou 3. Kliknúť na OK.
7. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Loads- Apply > -Structural- Displacement > On Nodes*. Zobrazí sa pikovacie okno Apply U,ROT on Nodes.
8. Kliknúť na uzol č.3. Kliknúť na OK. Zobrazí sa okno Apply U,ROT on Nodes.
9. Zvoliť položku UY. Vyplniť položku VALUE hodnotou 0. Kliknúť na OK.
10. (*) Zvoliť menu *Utility Menu > List > Loads > DOF Constraints > On All Nodes*. Zobrazí sa okno s výpisom okrajových podmienok. Okno uzatvoriť kliknutím na File/Close.

Krok 13: Riešenie

1. Zvoliť menu *Main Menu > Solution > -Solve- From LS Files*. Zobrazí sa okno Solve Load Step Files.
2. Vyplniť položku LSMIN hodnotou 1 a položku LSMAX hodnotou 3. Kliknúť na OK.
3. Zobrazí sa okno Information s textom Solution is done. Kliknúť na Close.

Krok 14: 1. zaťažovací stav – výstupné hodnoty

1. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > -Read Results- First Set*.
2. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > ElementTable > Define Table*. Otvorí sa okno Element Table Data.
3. Kliknúť na Add. Otvorí sa okno Define Additional Element Table Items.
4. Vyplniť položku User label textom N1. V ľavom rolovacom okne zvoliť položku By sequence num. Pod pravým rolovacím oknom sa zobrazí text SMISC. Za čiarku dopísať hodnotu 1. Kliknúť na OK.
5. Kliknúť na Close v okne Element table data.
6. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > Plot Resultst > Deformed shape*. Otvorí sa okno Plot Deformed Shape. Kliknúť na OK.

7. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > List Resultst > Nodal solution*. Otvorí sa okno List Nodal Solution. Kliknúť na OK.
8. Otvorí sa okno s výpisom uzlových posunov. Kliknúť na File/Save as a zapísať súbor. Kliknúť na File/Close.
9. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > Plot Resultst > Line Eleme Res*. Otvorí sa okno Plot Line-Element Results.
10. Nastaviť položku LabI a LabJ na rovnaký text N1. Kliknúť na OK.
11. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > List Resultst > Element Table Data*. Otvorí sa okno List Element Table Data.
12. V rolovacom okne nastaviť položku N1. Kliknúť na OK.
13. Otvorí sa okno s výpisom osových síl. Kliknúť na File/Save as a zapísať súbor. Kliknúť na File/Close.

Krok 15: 2. zaťažovací stav – výstupné hodnoty

1. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > -Read Results- Next Set*.
| Zopakovať podľa časti Krok 11.
4. Vyplniť položku User label textom N2. V ľavom rolovacom okne zvoliť položku By sequence num. Pod pravým rolovacím oknom sa zobrazí text SMISC. Za čiarku dopísať hodnotu 1. Kliknúť na OK.
| Zopakovať podľa časti Krok 11.
10. Nastaviť položku LabI a LabJ na rovnaký text N2. Kliknúť na OK.
11. Zopakovať podľa časti Krok 11.
12. V rolovacom okne nastaviť položku N2. Kliknúť na OK.
13. Zopakovať podľa časti Krok 11.

Krok 16: 3. zaťažovací stav – výstupné hodnoty

1. Zvoliť menu *Main Menu > General Postproc > -Read Results- Next Set*.
| Zopakovať podľa časti Krok 11.
4. Vyplniť položku User label textom N2. V ľavom rolovacom okne zvoliť položku By sequence num. Pod pravým rolovacím oknom sa zobrazí text SMISC. Za čiarku dopísať hodnotu 1. Kliknúť na OK.
| Zopakovať podľa časti Krok 11.
10. Nastaviť položku LabI a LabJ na rovnaký text N2. Kliknúť na OK.
11. Zopakovať podľa časti Krok 11.
12. V rolovacom okne nastaviť položku N2. Kliknúť na OK.
13. Zopakovať podľa časti Krok 11.

Krok 17: Ukončenie práce

1. Zvoliť menu *Utility Menu > File > Exit*. Otvorí sa okno Exit from ANSYS.
2. Kliknúť na OK.
3. Zálohovať všetky súbory s príponou CDB, S01, S02, S03 a RST.

Kroky označené (*) nie sú nutné pre korektný chod spracovania úlohy.

9.1.3 Výpočet pomocou makier

Systém ANSYS je otvorený a umožňuje užívateľom vytvárať si vlastné makrá. Uvedené makrá predstavujú skupinu príkazov, ktorú môžeme aktivovať jedným príkazom – názvom súboru typu "File.mac". Makro je textový súbor, ktorý musí byť vytvorený textovým editorom, umožňujúcim zápis v ASCII formáte. (jednoduchý TXT formát).

Postup vytvorenia a použitia makra príkazu:

1. Otvorte pomocou textového editoru (napr. Notepad) nový súbor NOSNIK.MAC
2. Zapište postupne do súboru príkazy podľa časti 7.1.1. Komentáre môžete vynechať.
3. Uložte súbor a otvorte ANSYS.
4. Do okna "Input Line" napíšte príkaz NOSNIK a stlačte Enter.
5. Spustí sa výpočet. Po ukončení výpočtu sa ANSYS uzavrie a v pracovnom adresári nájdete výstupné súbory STAV1.TXT, STAV2.TXT a STAV3.TXT.

9.1.4 Výsledky výpočtu

Výsledky výpočtu sú uložené v súboroch STAV1.TXT, STAV2.TXT a STAV3.TXT. Na ukážku je uvedený obsah súboru STAV1.TXT.

```
PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=      0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

      NODE      UX      UY      UZ      USUM
      1      .14884E-02  -.85930E-03  .00000      .17186E-02
      2      .17794E-02  -.31750E-02  .00000      .36396E-02
      3      .20704E-02  .00000      .00000      .20704E-02
      4      .16334E-02  -.30559E-02  .00000      .34651E-02
      5      .00000      .13452E-03  .00000      .13452E-03

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
      NODE      3      2      0      2
      VALUE      .20704E-02  -.31750E-02  .00000      .36396E-02

PRINT REACTION SOLUTIONS PER NODE

***** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING *****

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=      0

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES

      NODE      FX      FY
```

```

1    25.331    43.874
3    6.1260
5   -75.331

TOTAL VALUES
VALUE   -50.000    50.000

PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****

STAT    CURRENT
ELEM    N1
1    91.667
2    91.667
3   -124.95
4   -80.453
5    50.000
6    28.249
7   -97.900

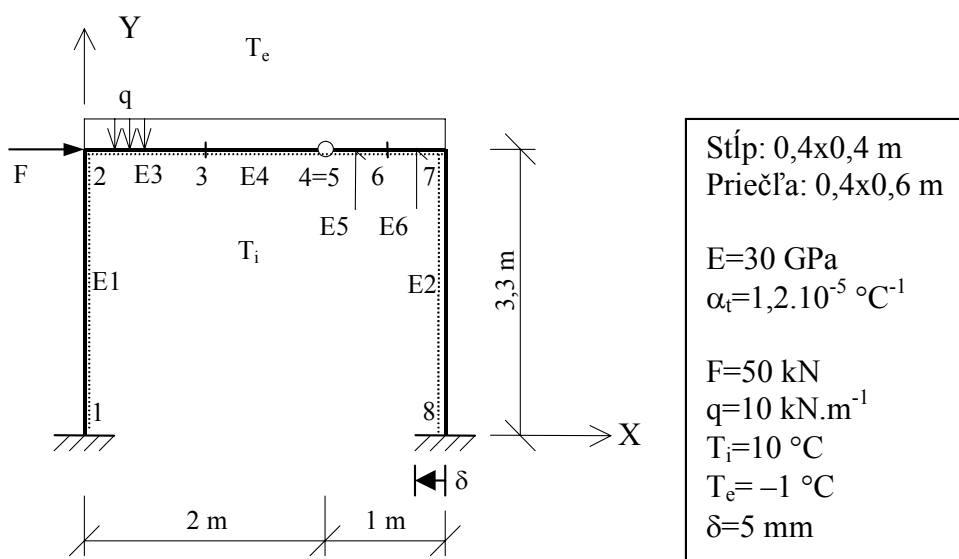
MINIMUM VALUES
ELEM      3
VALUE   -124.95

MAXIMUM VALUES
ELEM      2
VALUE    91.667

```

9.2 Rámová konštrukcia s vnútorným kĺbom

Na rovinnej rámovej konštrukcii vyriešte premiestnenia, reakcie a prierezoové sily od účinkov silového zaťaženia (F , q), teplotného zaťaženia (Δt) a nepružného premiestnenia podpory (δ). Konštrukcia je zo železobetónu.



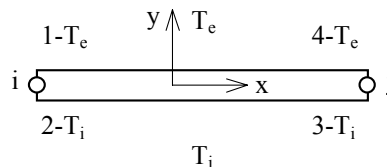
Riešenie:

Na riešenie konštrukcie je použitý typ prvku BEAM3, ktorý umožňuje definovať v každom uzle horizontálny, vertikálny posun UX, UY a rotáciu ROTZ. Pred výpočtom si pripravíme prierezové charakteristiky priečle a stĺpa:

$$\text{Stĺp:} \quad A = b \cdot h = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \text{ m}^2 \quad I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,4^3 = 0,00213 \text{ m}^4$$

$$\text{Priečľa:} \quad A = b \cdot h = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \text{ m}^2 \quad I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,6^3 = 0,0072 \text{ m}^4$$

Zadanie teplotného zaťaženia závisí od lokálneho súradnicového systému prvku. Poradie zadávaných teplôt v príkaze BFE je podľa obrázku:



```
/TITLE,Ramova konštrukcia
```

```
/PREP7 ! Štartovanie preprocesora
```

```
ET,1,BEAM3 ! Typ prvku č.1
```

```
ETLIST ! Výpis typov prvkov
```

```
R,1,0.24,0.00720,0.6 ! Prierez č.1 - A, IZZ, H
```

```
R,2,0.16,0.00213,0.4 ! Prierez č.2 - A, IZZ, H
```

```
RLIST ! Výpis prierezových charakteristík
```

```
MP,EX,1,30e6 ! Materiál č.1 - modul pružnosti
```

```
MP,ALPX,1,1.2e-5 ! Materiál č.1 - súčiniteľ teplotnej rozťažnosti
```

```
MPLIST ! Výpis materiálových charakteristík
```

```
N,1,0,0 ! Uzol č.1 - súradnice X a Y
```

```
N,2,0,3.3 ! Uzol č.2 - súradnice X a Y
```

```
N,3,1,3.3 ! Uzol č.3 - súradnice X a Y
```

```
N,4,2,3.3 ! Uzol č.4 - súradnice X a Y, totožný s uzlom č.5 - kĺb
```

```
N,5,2,3.3 ! Uzol č.5 - súradnice X a Y, totožný s uzlom č.4 - kĺb
```

```
N,6,2.5,3.3 ! Uzol č.6 - súradnice X a Y
```

```
N,7,3,3.3 ! Uzol č.7 - súradnice X a Y
```

```
N,8,3,0 ! Uzol č.8 - súradnice X a Y
```

```
NLIST ! Výpis uzlov a ich súradnic
```

```
NPLOT,1 ! Vykreslenie uzlov s číslovaním
```

```
TYPE,1 ! Stĺp - typ prvku č.1
```

```
MAT,1 ! Stĺp - materiál č.1
```

```
REAL,1 ! Stĺp - prierez č.1
```

```
E,1,2 ! Stĺp - prvok č.1 s uzlami č.1 a č.2
```

```
E,8,7 ! Stĺp - prvok č.2 s uzlami č.6 a č.5
```

```
TYPE,1 ! Priečľa - typ prvku č.1
```

```
MAT,1 ! Priečľa - materiál č.1
```

```

REAL,2                ! Priečla - prierez č.2
E,2,3 ! Priečla - prvok č.3 s uzlami č.2 a č.3
E,3,4 ! Priečla - prvok č.4 s uzlami č.3 a č.4
E,5,6 ! Priečla - prvok č.5 s uzlami č.5 a č.6
E,6,7 ! Priečla - prvok č.6 s uzlami č.6 a č.7
ELIST ! Výpis prvkov a ich vlastností
EPLOT ! Vykreslenie prvkov
/PNUM,REAL,1          ! Nastavenie vykresľovania prvkov podľa reálnych
konštánt
EPLOT ! Vykreslenie prvkov

CP,1,UX,4,5           ! Vnútrotný kĺb - 1. spoločný posun UX uzlov č.4 a
č.5
CP,2,UY,4,5           ! Vnútrotný kĺb - 2. spoločný posun UY uzlov č.4 a
č.5
CPLIST                ! Výpis vnútrotných väzieb

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
CDWRITE               ! Zápis do ASCII súboru typu CDB
FINISH               ! Ukončenie preprocesora

/SOLU ! Štartovanie solvera

D,1,ALL              ! Votknutie v uzle č.1
D,8,ALL              ! Votknutie v uzle č.8
DLIST ! Výpis okrajových podmienok

! 1. ZAŤAŽOVACÍ STAV
F,2,FX,50            ! Sila v uzle č.2 v smere X
SFBEAM,3,,PRESS,10   ! Spojité zataženie na prvku č.3
SFBEAM,4,,PRESS,10   ! Spojité zataženie na prvku č.4
SFBEAM,5,,PRESS,10   ! Spojité zataženie na prvku č.5
SFBEAM,6,,PRESS,10   ! Spojité zataženie na prvku č.6
FLIST ! Výpis silových zatažení
SFELIST              ! Výpis spojitých zatažení
LSWRITE,1            ! Zápis 1.zatažovacieho stavu
FDELE,ALL,ALL        ! Vymazanie silového zataženia
SFDELE,ALL,ALL,ALL   ! Vymazanie spojitého zataženia
FLIST ! Výpis silových zatažení (zataženie už neexistuje)
SFELIST              ! Výpis spojitých zatažení (zataženie už
neexistuje)

! 2. ZAŤAŽOVACÍ STAV
BFE,1,TEMP,,10,-1,-1,10 ! Teplotné zataženie na prvku č.1
BFE,2,TEMP,,10,-1,-1,10 ! Teplotné zataženie na prvku č.2
BFE,3,TEMP,,-1,10,10,-1 ! Teplotné zataženie na prvku č.3
BFE,4,TEMP,,-1,10,10,-1 ! Teplotné zataženie na prvku č.4
BFE,5,TEMP,,-1,10,10,-1 ! Teplotné zataženie na prvku č.5
BFE,6,TEMP,,-1,10,10,-1 ! Teplotné zataženie na prvku č.6
BFELIST              ! Výpis teplotných zatažení
LSWRITE,2            ! Zápis 2.zatažovacieho stavu
BFDELE,ALL,ALL       ! Vymazanie teplotného zataženia
BFELIST              ! Výpis teplotných zatažení (zataženie už
neexistuje)

! 3. ZAŤAŽOVACÍ STAV
D,8,UY,-0.005        ! Pokles podpory v uzle č.8 v smere -Y
DLIST ! Výpis okrajových podmienok (prejaví sa pokles podpory)
LSWRITE,3            ! Zápis 3.zatažovacieho stavu
D,6,UY               ! Vymazanie poklesu podpory (pokles = 0)
DLIST ! Výpis poklesov podpory (pokles už neexistuje)

```

```

LSSOLVE,1,3          ! Riešenie 1. až 3. zaťažovacieho stavu
FINISH               ! Ukončenie solvera

/POST1              ! Štartovanie postprocesora

SET,1 ! Načítanie výsledkov riešenia 1.zaťažovacieho stavu
ETABLE,n1,SMIS,1     ! Osová sila na začiatku prúta
ETABLE,n2,SMIS,7     ! Osová sila na konci prúta
ETABLE,t1,SMIS,2     ! Pričná sila na začiatku prúta
ETABLE,t2,SMIS,8     ! Pričná sila na konci prúta
ETABLE,m1,SMIS,6     ! Ohybový moment na začiatku prúta
ETABLE,m2,SMIS,12    ! Ohybový moment na konci prúta
PLDISP,2            ! Vykreslenie posunov
PLLS,n1,n2          ! Vykreslenie osových síl
PLLS,t1,t2          ! Vykreslenie priečných síl
PLLS,m1,m2          ! Vykreslenie ohybových momentov
PRNSOL,U            ! Výpis posunov uzlov
PRRSOL              ! Výpis reakcií a osových síl
PRETAB              ! Výpis vnútorných síl
/OUTPUT,stav1,txt    ! Presmerovanie textového výstupu do súboru
"stav1.txt"
PRNSOL,U            ! Výpis posunov uzlov "stav1.txt"
PRRSOL              ! Výpis reakcií do súboru "stav1.txt"
PRETAB              ! Výpis vnútorných síl do súboru "stav1.txt"
/OUTPUT             ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku
/SHOW,stav1,grp      ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"stav1.grp"
PLDISP,2            ! Vykreslenie posunov do súboru "stav1.grp"
PLLS,n1,n2          ! Vykreslenie osových síl do súboru "stav1.grp"
PLLS,t1,t2          ! Vykreslenie priečných síl do súboru "stav1.grp"
PLLS,m1,m2          ! Vykreslenie ohybových momentov do súboru
"stav1.grp"
/SHOW,TERM          ! Presmerovanie grafického výstupu späť na
obrazovku

SET,2 ! Načítanie výsledkov riešenia 2.zaťažovacieho stavu
ETABLE,n1,SMIS,1     ! Osová sila na začiatku prúta
ETABLE,n2,SMIS,7     ! Osová sila na konci prúta
ETABLE,t1,SMIS,2     ! Pričná sila na začiatku prúta
ETABLE,t2,SMIS,8     ! Pričná sila na konci prúta
ETABLE,m1,SMIS,6     ! Ohybový moment na začiatku prúta
ETABLE,m2,SMIS,12    ! Ohybový moment na konci prúta
PLDISP,2            ! Vykreslenie posunov
PLLS,n1,n2          ! Vykreslenie osových síl
PLLS,t1,t2          ! Vykreslenie priečných síl
PLLS,m1,m2          ! Vykreslenie ohybových momentov
PRNSOL,U            ! Výpis posunov uzlov
PRRSOL              ! Výpis reakcií a osových síl
PRETAB              ! Výpis vnútorných síl
/OUTPUT,stav2,txt    ! Presmerovanie textového výstupu do súboru
"stav2.txt"
PRNSOL,U            ! Výpis posunov uzlov "stav2.txt"
PRRSOL              ! Výpis reakcií do súboru "stav2.txt"
PRETAB              ! Výpis vnútorných síl do súboru "stav2.txt"
/OUTPUT             ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku
/SHOW,stav2,grp      ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"stav2.grp"
PLDISP,2            ! Vykreslenie posunov do súboru "stav2.grp"
PLLS,n1,n2          ! Vykreslenie osových síl do súboru "stav2.grp"
PLLS,t1,t2          ! Vykreslenie priečných síl do súboru "stav2.grp"

```

```

PLLS,m1,m2          !   Vykreslenie ohybových momentov do súboru
"stav2.grp"
/SHOW,TERM          !   Presmerovanie grafického výstupu späť na
obrazovku

SET,3 ! Načítanie výsledkov riešenia 3.zaťažovacieho stavu
ETABLE,n1,SMIS,1     ! Osová sila na začiatku prúta
ETABLE,n2,SMIS,7     ! Osová sila na konci prúta
ETABLE,t1,SMIS,2     ! Pričná sila na začiatku prúta
ETABLE,t2,SMIS,8     ! Pričná sila na konci prúta
ETABLE,m1,SMIS,6     ! Ohybový moment na začiatku prúta
ETABLE,m2,SMIS,12    ! Ohybový moment na konci prúta
PLDISP,2             ! Vykreslenie posunov
PLLS,n1,n2           ! Vykreslenie osových síl
PLLS,t1,t2           ! Vykreslenie priečných síl
PLLS,m1,m2           ! Vykreslenie ohybových momentov
PRNSOL,U             ! Výpis posunov uzlov
PRRSOL               ! Výpis reakcií a osových síl
PRETAB               ! Výpis vnútorných síl
/OUTPUT,stav3,txt    !   Presmerovanie textového výstupu do súboru
"stav3.txt"
PRNSOL,U             ! Výpis posunov uzlov "stav3.txt"
PRRSOL               ! Výpis reakcií do súboru "stav3.txt"
PRETAB               ! Výpis vnútorných síl do súboru "stav3.txt"
/OUTPUT              ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku
/SHOW,stav3,grp      !   Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"stav3.grp"
PLDISP,2             ! Vykreslenie posunov do súboru "stav3.grp"
PLLS,n1,n2           ! Vykreslenie osových síl do súboru "stav3.grp"
PLLS,t1,t2           ! Vykreslenie priečných síl do súboru "stav3.grp"
PLLS,m1,m2           !   Vykreslenie ohybových momentov do súboru
"stav3.grp"
/SHOW,TERM          !   Presmerovanie grafického výstupu späť na
obrazovku

FINISH               ! Ukončenie postprocesora
/EXIT ! Ukončenie práce v ANSYS

```

V pracovnom adresári sa vytvoria textové súbory STAV1.TXT, STAV2.TXT, STAV3 a grafické súbory STAV1.GRP, STAV2.GRP, STAV3.GRP. Na ukážku sú uvedené výsledky z 3.zaťažovacieho stavu STAV3.TXT a priebeh premiestnení a ohybových momentov v grafickom tvare.

```
PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE
```

```
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
```

```
LOAD STEP=      3  SUBSTEP=      1
TIME=      3.0000  LOAD CASE=      0
```

```
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES
```

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.15977E-02	-.19330E-04	.00000	.15978E-02
3	.15957E-02	-.16177E-02	.00000	.22723E-02

4	.15937E-02	-.38761E-02	.00000	.41909E-02
5	.15937E-02	-.38761E-02	.00000	.41909E-02
6	.15927E-02	-.44696E-02	.00000	.47449E-02
7	.15917E-02	-.49807E-02	.00000	.52288E-02
8	.00000	-.50000E-02	.00000	.50000E-02

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	2	8	0	7
VALUE	.15977E-02	-.50000E-02	.00000	.52288E-02

PRINT REACTION SOLUTIONS PER NODE

***** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING *****

LOAD STEP= 3 SUBSTEP= 1
TIME= 3.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	FX	FY	MZ
1	9.5313	42.174	52.895
8	-9.5313	-42.174	73.627

TOTAL VALUES

VALUE	.27178E-11	.50449E-11	126.52
-------	------------	------------	--------

PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****

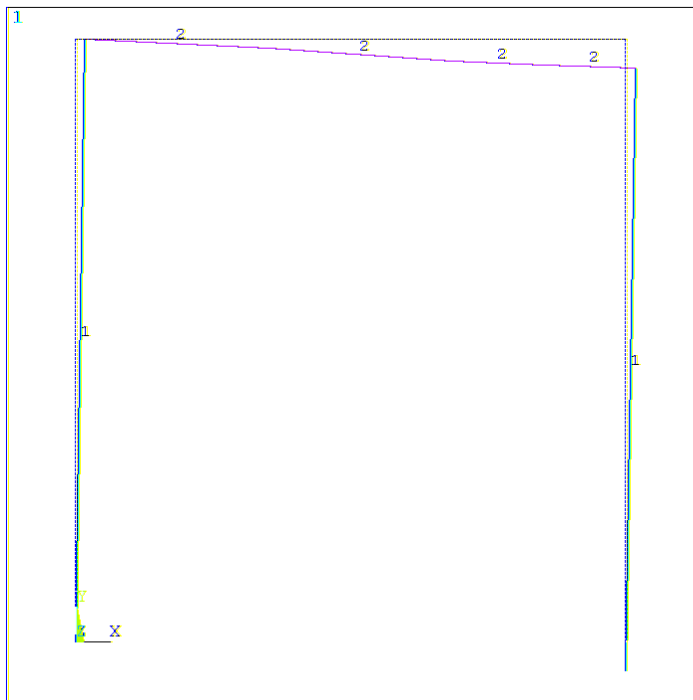
STAT	CURRENT	CURRENT	CURRENT	CURRENT	CURRENT	
CURRENT						
ELEM	N1	N2	T1	T2	M1	M2
1	-42.174	-42.174	9.5313	9.5313	-52.895	-
84.348						
2	42.174	42.174	-9.5313	-9.5313	-73.627	-
42.174						
3	-9.5313	-9.5313	-42.174	-42.174	-84.348	-
42.174						
4	-9.5313	-9.5313	-42.174	-42.174	-42.174	-
.16631E-12						
5	-9.5313	-9.5313	-42.174	-42.174	-.83089E-12	-
21.087						
6	-9.5313	-9.5313	-42.174	-42.174		21.087
42.174						

MINIMUM VALUES

ELEM	1	1	3	3	3
1					
VALUE	-42.174	-42.174	-42.174	-42.174	-84.348
84.348					

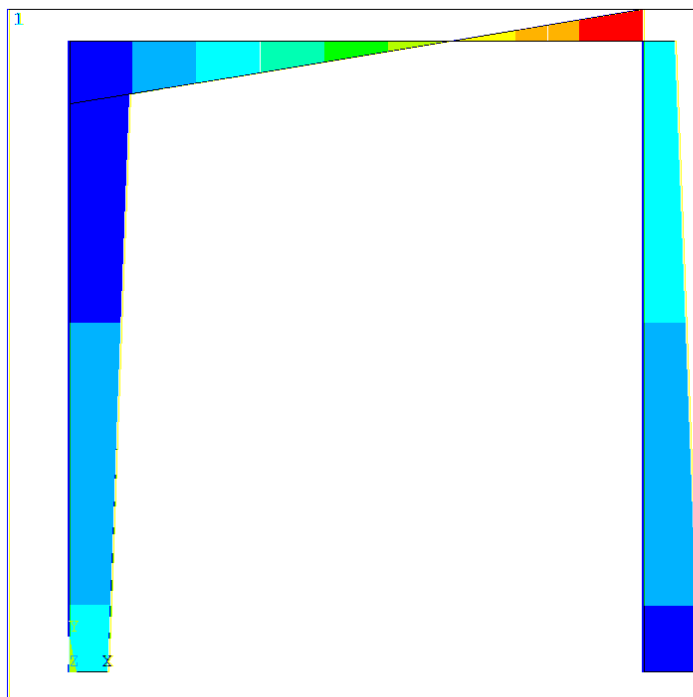
MAXIMUM VALUES

ELEM	2	2	1	1	6
6					
VALUE	42.174	42.174	9.5313	9.5313	21.087
42.174					



ANSYS 5.6.2
 OCT 8 2001
 14:20:50
 PLOT NO. 1
 DISPLACEMENT
 STEP=3
 SUB =1
 TIME=3
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 DMX =.005229

 DSCA=31.556
 ZV =1
 DIST=1.901
 XF =1.525
 YF =1.571
 Z-BUFFER

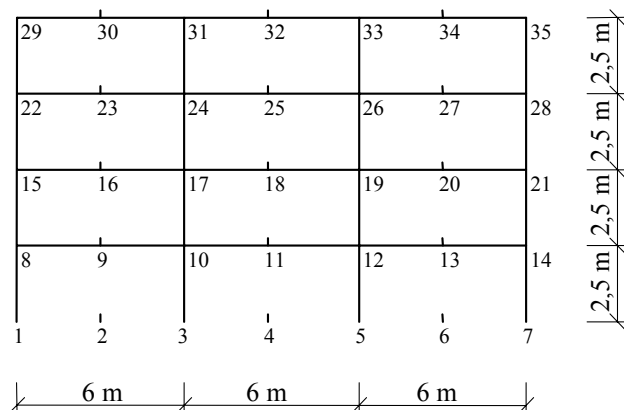


ANSYS 5.6.2
 OCT 8 2001
 14:20:50
 PLOT NO. 4
 LINE STRESS
 STEP=3
 SUB =1
 TIME=3
 M1 M2
 MIN =-84.348
 ELEM=3
 MAX =42.174
 ELEM=6
 -84.348
 -70.29
 -56.232
 -42.174
 -28.116
 -14.058
 -.362E-11
 14.058
 28.116
 42.174

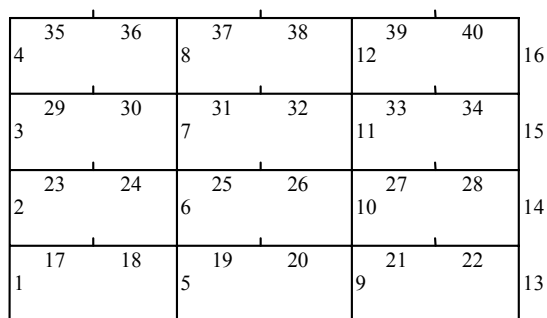
9.3 Generovanie uzlov a prvkov rámu kopírovaním

Vytvorte model rovinnej rámovej konštrukcie pomocou priameho generovania uzlov a prvkov. Konštrukcia je zo železobetónu. Rozmery stĺpu sú 0,4x0,4m a rozmery priečle sú 0,4x0,6m.

Číslovanie uzlov



Číslovanie prvkov



Na riešenie konštrukcie je použitý typ prvku BEAM3, ktorý umožňuje definovať v každom uzle horizontálny, vertikálny posun UX, UY a rotáciu ROTZ. Pred samotným generovaním si pripravíme prierezové charakteristiky priečle a stĺpa:

$$\text{Stĺp:} \quad A = b \cdot h = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \, \text{m}^2 \quad I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,4^3 = 0,00213 \, \text{m}^4$$

$$\text{Priečľa:} \quad A = b \cdot h = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \, \text{m}^2 \quad I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,6^3 = 0,0072 \, \text{m}^4$$

Celé generovanie konštrukcie bude prebiehať iba v preprocesore. Budeme používať dvojicu príkazov na generovanie uzlov **NGEN** a prvkov **EGEN**.

NGEN, *ITIME*, *INC*, *NODE1*, *NODE2*, *NINC*, *DX*, *DY*, *DZ*, *SPACE*

ITIME – Počet generovaných sád uzlov, vrátane vzorovej sady. Toto číslo musí byť väčšie ako 1.

INC – Prírastok číslovaní uzlov.

NODE1, NODE2, INC – Vzorová sada uzlov je uzol *NODE1* až uzol *NODE2* s krokom číslovaní uzlov *NINC*. Ak parameter *NINC* nie je zadaný, krok číslovaní uzlov je štandardne 1.

DX, DY, DZ – Vzdialenosť v smere osí X, Y, Z o ktorú bude posunutá nová vygenerovaná sada uzlov od vzorkovej sady, resp. od predchádzajúcej sady.

SPACE – Pomer, podľa ktorého bude zmenšovaná alebo zväčšovaná vzdialenosť *DX, DY, DZ*. Možno tým dosiahnuť efekt, že vzdialenosť jednotlivých sád uzlov sa bude rovnomerne zmenšovať alebo zväčšovať. Ak tento parameter nie je zadaný, štandardne sa vezme hodnota 1, teda vzdialenosť generovaných sád uzlov je rovnaká.

EGEN, ITIME, NINC, IEL1, IEL2, IEINC, MINC, TINC, RINC, CINC

ITIME – Počet generovaných sád prvkov, vrátane vzorovej sady. Toto číslo musí byť väčšie ako 1.

NINC – Prírastok číslovaní uzlov prvku.

IEL1, IEL2, IEINC – Vzorová sada prvkov je prvok *ELEM1* až prvok *ELEM2* s krokom číslovaní prvkov *IEINC*. Ak parameter *IEINC* nie je zadaný, krok číslovaní prvkov je štandardne 1.

MINC, TINC, RINC, CINC – Prírastok číslovaní materiálu, typu prvku, reálnej konštanty a súradnicového systému prvku.

Najprv zadefinujeme parametre konštrukcie:

```
/TITLE,Generovanie uzlov a prvkov
/TRIAD,LTOP                ! Súradnicový systém je v ľavom hornom rohu
obrazovky

/PREP7                     ! Štartovanie preprocesora

ET,1,BEAM3                 ! Typ prvku č.1
ETLIST                     ! Výpis typov prvkov

R,1,.16,.00213,.4          ! Stĺp - prierez č.1
R,2,.24,.00720,.6          ! Priečla - prierez č.2
RLIST                      ! Výpis prierezových charakteristík

MP,EX,1,30e6               ! Materiál č.1 - modul pružnosti
MP,ALPX,1,1.2e-5           ! Materiál č.1 - koeficient teplotnej rozťažnosti
MPLIST                     ! Výpis materiálových charakteristík
```

Ako prvý definujeme uzol č.1 pomocou príkazu **N**:

```
N,1,0,0                    ! Uzol č.1 - súradnica X a Y
```

Teraz vygenerujeme uzly č.2 až č.7 v smere osi X pomocou príkazu **NGEN**. Parametre príkazu majú nasledujúci význam:

7 = Budeme generovať 6 nových uzlov v smere osi X, vrátane uzla č.1, teda $6+1=7$.

1 = Prírastok číslovania uzlov bude 1, teda nasledujúci uzol bude mať číslo 2, atď. až po č.7.

1,1,1 = Ako vzorové uzly, ktoré budú kopírované sú uzly č.1 až č.1 s krokom číslovania 1. Posledné dva parametre môžeme v tomto prípade vynechať, pretože máme iba jeden vzorový uzol.

3 = vzdialenosť v smere osi X, o ktorú sa posunie každá vygenerovaná sada uzlov. Ďalšie parametre nie sú potrebné, pretože generujeme uzly iba v smere osi X.

```
NGEN,7,1,1,1,1,3      ! Generovanie uzlov č.2 až č.7 zo sady uzlov č.1
```

Ďalej vygenerujeme uzly č.8 až č.35 v smere osi Y kopírovaním uzlov č.1 až č.7 pomocou príkazu **NGEN**. Parametre príkazu majú nasledujúci význam:

5 = Budeme generovať 4 nové sady uzlov v smere osi Y, vrátane uzlov č.1 až č.7, teda $4+1=5$.

7 = Prírastok číslovania uzlov bude 7, pretože uzlu č.1 zodpovedá uzol č.8 v novej sade, uzlu č.2 zodpovedá uzol č.9 v novej sade, atď.

1,7,1 = Ako vzorové uzly, ktoré budú kopírované sú uzly č.1 až č.7 s krokom číslovania 1. Posledný paramer môžeme v tomto prípade vynechať, pretože krok je jednotkový.

, ,2.5 = vzdialenosť v smere osi X je vynechaná, vzdialenosť v smere osi Y je zadaná, pretože o túto vzdialenosť sa posunie každá vygenerovaná sada uzlov. Ďalšie parametre nie sú potrebné, pretože generujeme uzly iba v smere osi Y.

```
NGEN,5,7,1,7,1,,2.5    ! Generovanie uzlov č.8 až č.35 zo sady uzlov č.1 až č.7
```

```
NLIST                  ! Výpis uzlov a ich súradníc
```

```
NPLOT,1                ! Vykreslenie uzlov a číslovania
```

```
TYPE,1                 ! Stĺp - typ prvku č.1
```

```
MAT,1                  ! Stĺp - materiál č.1
```

```
REAL,1                 ! Stĺp - prierez č.1
```

```
E,1,8                  ! Stĺp - prvok č.1 s uzlami č.1 a č.8
```

Teraz vygenerujeme prvky stĺpov č.2 až č.4, ako vzorový prvok bude prvok č.1. Parametre príkazu **EGEN** majú nasledujúci význam:

4 = Budeme generovať 3 nové prvky zo vzoroveho prvku č.1, teda $3+1=4$.

7 = Prírastok číslovania uzlov prvkov bude 7. Prvok č.1 má uzly č.1 a č.8. Nasledujúci generovaný prvok má uzly č.8=1+7 a č.15=8+7.

1,1,1 = Kopírovaná sada prvkov. Kopírujeme prvok č.1 až prvok č.1 s krokom číslovania 1.
V tomto prípade môžeme posledné dva parametre vynechať.

```
EGEN,4,7,1,1,1           ! Kopírovanie prvkov
```

Ďalej vygenerujeme prvky stĺpov č.5 až č.16, ako vzorové prvky budú prvky č.1 až č.4.
Parametre príkazu **EGEN** majú nasledujúci význam:

4 = Budeme generovať 3 nové sady prvkov zo vzorových prvkov č.1 až č.4, teda $3+1=4$.

2 = Prírastok číslovania uzlov prvkov bude 2. Prvok č.1 má uzly č.1 a č.8. Nasledujúci generovaný prvok má uzly č.3= $1+2$ a č.10= $8+2$.

1,4,1 = Kopírovaná sada prvkov. Kopírujeme prvok č.1 až prvok č.4 s krokom číslovania 1.
V tomto prípade môžeme posledný parameter vynechať.

```
EGEN,4,2,1,4,1           ! Generovanie prvkov
TYPE,1                   ! Priečla - typ prvku č.1
MAT,1                    ! Priečla - materiál č.1
REAL,2                   ! Priečla - prierez č.2
E,8,9                    ! Priečla - prvok s uzlami č.8 a č.9
```

Teraz vygenerujeme prvky priečle č.18 až č.22, ako vzorový prvok bude prvok č.17.
Parametre príkazu **EGEN** majú nasledujúci význam:

6 = Budeme generovať 5 nových prvkov zo vzorového prvku č.17, teda $5+1=6$.

1 = Prírastok číslovania uzlov prvkov bude 1. Prvok č.17 má uzly č.8 a č.9. Nasledujúci generovaný prvok má uzly č.9= $8+1$ a č.10= $9+1$.

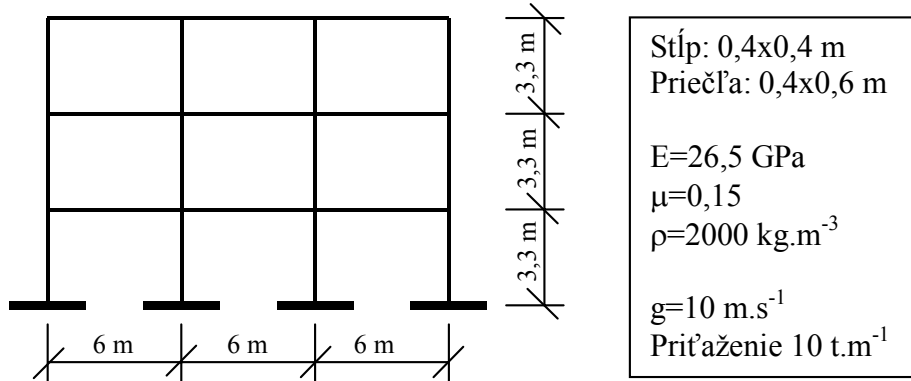
17,17,1 = Kopírovaná sada prvkov. Kopírujeme prvok č.17 až prvok č.17 s krokom číslovania 1. V tomto prípade môžeme posledné dva parametre vynechať.

```
EGEN,6,1,17,17,1        ! Generovanie prvkov
```

Tým je model rámovej konštrukcie ukončený.

9.4 Riešenie poschodového rámu

Vyriešte železobetónový rám od vlastnej tiaže. Na priečle budeme uvažovať aj priťaženie.



Riešenie:

Na riešenie použijeme prvky BEAM3. Uzly a prvky vytvoríme generovaním. Priečle medzi stĺpmi budú rozdelené na 2 prvky. Prierezové charakteristiky sa budú počítať pomocou príkazov ANSYSu.

```
/TITLE,Ramova konstrukcia
```

```
/PREP7 ! Startovanie preprocesora
```

```
ET,1,BEAM3 ! Typ prvku č.1
```

```
MP,EX,1,26500000 ! Materiál č.1 - modul pružnosti
```

```
MP,NUXY,1,0.15 ! Materiál č.1 - Poissonovo číslo
```

```
MP,DENS,1,2.5 ! Materiál č.1 - objemová hmotnosť
```

```
! PARAMETRE PRIEREZOV
```

```
_b=0.4 ! Šírka prierezu priečle aj stĺpa
```

```
_h1=0.4 ! Výška prierezu stĺpa
```

```
_h2=0.6 ! Výška prierezu priečle
```

```
_A1=_b*_h1 ! Prierezová plocha stĺpa
```

```
_IZ1=( _b*_h1**3)/12 ! Moment zotrvačnosti prierezu stĺpa
```

```
_A2=_b*_h2 ! Prierezová plocha priečle
```

```
_IZ2=( _b*_h2**3)/12 ! Moment zotrvačnosti prierezu priečle
```

```
_addmas=10 ! Prídavné zaťaženie na priečlu
```

```
_smyk=1.2 ! Smykový koeficient obdĺžnikového prierezu
```

```
R,1,_A1,_IZ1,_h1,_smyk ! Stĺp - prierez č.1
```

```
R,2,_A2,_IZ2,_h2,_smyk,,_addmas ! Priečľa - prierez č.2
```

```
N,1,0,0 ! Uzol č.1 - súradnice X a Y
```

```
NGEN,7,1,1,,,3 ! Generovanie uzlov v smere X
```

```
NGEN,4,7,1,7,,,3.3 ! Generovanie uzlov v smere Y
```

```
NPLOT,1 ! Vykreslenie uzlov s číslovaním
```

```
TYPE,1 ! Stĺp - typ prvku č.1
```

```
MAT,1 ! Stĺp - materiál č.1
```

```
REAL,1 ! Stĺp - prierez č.1
```

```
E,1,8 ! Stĺp - prvok č.1 s uzlami č.1 a č.8
```

```

EGEN,3,7,1      ! Stĺp - generovanie v smere Y
EGEN,4,2,1,3    ! Stĺp - generovanie v smere X
TYPE,1          ! Priečla - typ prvku č.1
MAT,1           ! Priečla - materiál č.1
REAL,1          ! Priečla - prierez č.2
E,8,9           ! Priečla - prvok s uzlami č.8 a č.9
EGEN,6,1,13     ! Priečla - generovanie v smere X
EGEN,3,7,13,18  ! Priečla - generovanie v smere Y
/ESHAPE,1        ! 3D vykreslenie s rozlíšením výšky prierezov
/SHRINK,0.1      ! Zmenšenie prvku pri vykresľovaní o 10%
/PNUM,REAL,1     ! Vykreslenie s rozlíšením prierezových
charakteristik
EPLOT           ! Vykreslenie prvkov
NDELE,ALL       ! Vymazanie prebytočných uzlov

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
CDWRITE         ! Zápis do ASCII súboru typu CDB
FINISH          ! Ukončenie preprocesora

/SOLU           ! Štartovanie solvera

NSEL,S,LOC,Y,0   ! Vyselektovanie uzlov so súradnicou Y=0
D,ALL,ALL        ! Definovanie votknutia vo všetkých vyselektovaných
uzloch
ALLSEL          ! Vyselektovanie všetkých entit
/PBC,U,,1        ! Nastavenie zobrazovania okrajových podmienok
EPLOT           ! Vykreslenie prvkov aj s okrajovými podmienkami

ACEL,,10         ! Gravitačné zrýchlenie v smere Y
SOLVE           ! Riešenie
FINISH          ! Ukončenie solvera

/POST1          ! Štartovanie postprocesora

SET             ! Načítanie výsledkov
ETABLE,n1,SMIS,1 ! Osová sila na začiatku prúta
ETABLE,n2,SMIS,7 ! Osová sila na konci prúta
ETABLE,t1,SMIS,2 ! Priečna sila na začiatku prúta
ETABLE,t2,SMIS,8 ! Priečna sila na konci prúta
ETABLE,m1,SMIS,6 ! Ohybový moment na začiatku prúta
ETABLE,m2,SMIS,12 ! Ohybový moment na konci prúta
PLDISP,2        ! Vykreslenie posunov
PLLS,n1,n2      ! Vykreslenie osových síl
PLLS,t1,t2      ! Vykreslenie priečných síl
PLLS,m1,m2      ! Vykreslenie ohybových momentov
PRNSOL,U        ! Výpis posunov uzlov
PRRSOL          ! Výpis reakcií a osových síl
PRETAB          ! Výpis vnútorných síl
/OUTPUT,ram,txt  ! Presmerovanie textového výstupu do súboru
"ram.txt"
PRNSOL,U        ! Výpis posunov uzlov "ram.txt"
PRRSOL          ! Výpis reakcií do súboru "ram.txt"
PRETAB          ! Výpis vnútorných síl do súboru "ram.txt"
/OUTPUT         ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku
/SHOW,ram,grp   ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"ram.grp"
PLDISP,2        ! Vykreslenie posunov do súboru "ram.grp"
PLLS,n1,n2      ! Vykreslenie osových síl do súboru "ram.grp"
PLLS,t1,t2      ! Vykreslenie priečných síl do súboru "ram.grp"
PLLS,m1,m2      ! Vykreslenie ohybových momentov do súboru
"ram.grp"

```

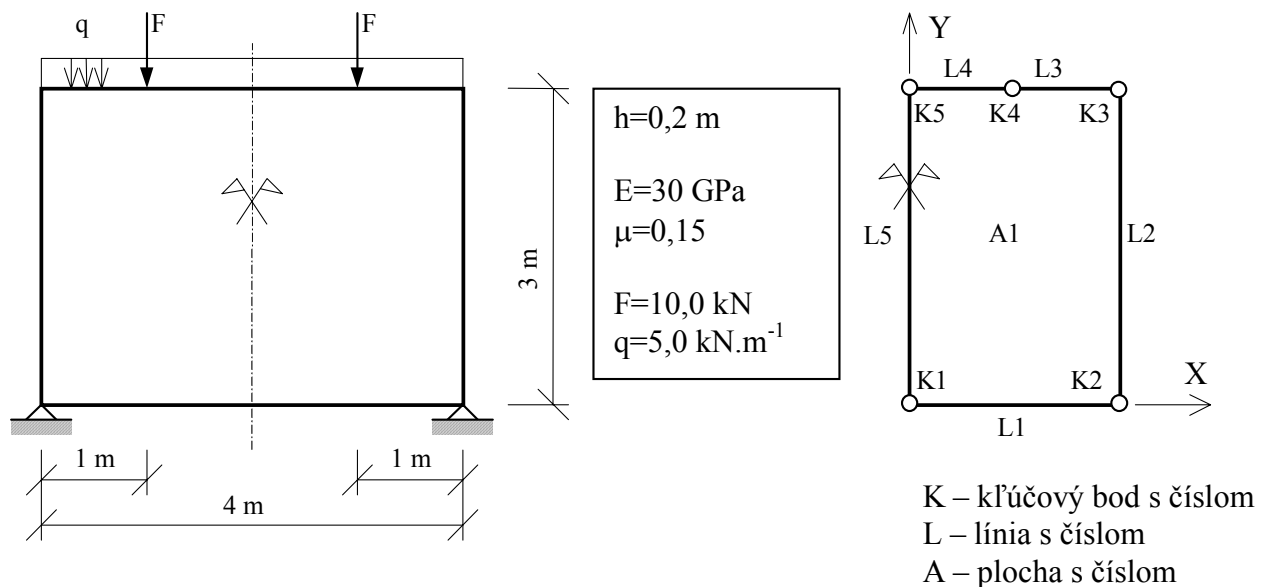
```

/SHOW,TERM          ! Presmerovanie grafického výstupu späť na
obrazovku
  FINISH             ! Ukončenie postprocesora
/EXIT ! Ukončenie práce v ANSYS

```

9.5 Rovinná stenová konštrukcia

Na stenovej konštrukcii vyriešte premiestnenia, reakcie a napätia od účinkov silového zaťaženia (F , q). Na riešenie použite systém Solid Modeling. Konštrukcia je zo železobetónu.



Riešenie:

Na riešenie konštrukcie je použitý typ štvoruzlového prvku PLANE42, ktorý umožňuje definovať v každom uzle horizontálny a vertikálny posun UX, UY. Prvok má aktivovanú kľúčovú voľbu umožňujúcu započítať vplyv hrúbky prvku. V tomto prípade je nutné prepočítať spojité líniové zaťaženie q na spojité plošné zaťaženie, ktoré pôsobí na hornú hranu, resp. plochu steny:

$$q_a = \frac{q_l}{h} = \frac{5}{0,2} = 25 \text{ kN.m}^{-2}$$

```

/TITLE, Stenova konštrukcia
/TRIAD, LTOP          ! Súradnicový systém je v ľavom hornom rohu
obrazovky

/PREP7                ! Štartovanie preprocesora

ET, 1, PLANE42, , , 3 ! Typ prvku č.1 (3 = prvok s vplyvom hrúbky)

```

```

ETLIST                ! Výpis typov prvkov

R,1,.2                ! Prierez č.1 - hrúbka steny
RLIST ! Výpis prierezových charakteristík

MP,EX,1,30e6,         ! Materiál č.1 - modul pružnosti
MP,NUXY,1,0.15        ! Materiál č.1 - Poissonovo číslo
MPLIST                ! Výpis materiálových charakteristík

K,1,0,0               ! Klúčový bod č.1 a jeho súradnice X a Y
K,2,2,0               ! Klúčový bod č.2 a jeho súradnice X a Y
K,3,2,3               ! Klúčový bod č.3 a jeho súradnice X a Y
K,4,1,3               ! Klúčový bod č.4 a jeho súradnice X a Y
K,5,0,3               ! Klúčový bod č.5 a jeho súradnice X a Y
KLIST ! Výpis klúčových bodov a ich súradníc
KPLOT ! Vykreslenie klúčových bodov

A,1,2,3,4,5           ! Vytvorenie plochy č.1 z klúčových bodov č.1 až
                        č.5
ALIST ! Výpis plôch
APLOT ! Vykreslenie plôch

LLIST ! Výpis línií č.1 až č.5, ktoré opisujú plochu č.1
LPLOT ! Vykreslenie línií č.1 až č.5, ktoré opisujú plochu č.1

LESIZE,1,,,6          ! Rozdelenie línie č.1 na 6 dielov
LESIZE,2,,,8          ! Rozdelenie línie č.2 na 8 dielov
LESIZE,3,,,3          ! Rozdelenie línie č.3 na 3 diely
LESIZE,4,,,3          ! Rozdelenie línie č.4 na 3 diely
LESIZE,5,,,8          ! Rozdelenie línie č.5 na 8 dielov
LCCAT,3,4             ! Spojenie línie č.3 a č.4 pre generovanie prvkov

ESHAPE,2              ! Generovaná sieť prvkov bude štvoruholníková

TYPE,1                ! Stena - typ prvku č.1
MAT,1 ! Stena - materiál č.1
REAL,1                ! Stena - prierez č.1
AMESH,1               ! Generovanie prvkov na ploche č.1
ELIST ! Výpis prvkov
EPLLOT ! Vykreslenie prvkov

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
FINISH                ! Ukončenie preprocesora

/SOLU ! Štartovanie solvera

DK,2,UX               ! Podopretie v klúčovom bode č.2 v smere X
DK,2,UY               ! Podopretie v klúčovom bode č.2 v smere Y
DL,5,1,SYMM           ! Podopretie na línii č.5 ku ploche č.1 symetricky
DKLIST                ! Výpis okrajových podmienok v klúčových bodoch
DLLIST                ! Výpis okrajových podmienok na línii
DTRAN ! Transfer okrajových podmienok na FE model (na uzly)
DLIST ! Výpis okrajových podmienok v uzloch konštrukcie

FK,4,FY,-10           ! Zataženie silou v klúčovom bode č.4 v smere -Y
FKLIST                ! Výpis síl v klúčových bodoch
FTRAN ! Transfer silového zataženia na FE model (na uzly)
FLIST ! Výpis silového zataženia v uzloch konštrukcie

SFL,3,PRESS,25        ! Zataženie tlakovým spojitým zatažením na línii
                        č.3

```

```

SFL,4,PRESS,25      ! Zataženie tlakovým spojitým zatažením na línii
                     ! č.4
SFLLIST             ! Výpis spojitých zatažení na liniách
SFTRAN              ! Transfer spojitého zataženia na FE model (na
prvky)
SFLIST              ! Výpis spojitých zatažení na prvkoch

/PBC,ALL,ALL         ! Vykresľovanie okrajových podmienok a silového
zataženia
/PSF,PRESS,NORM,2    ! Vykresľovanie spojitého zataženia
EPLOT ! Vykreslenie prvkov

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
SOLVE ! Riešenie úlohy (jeden zatažovací stav)
FINISH              ! Ukončenie solvera

/POST1              ! Štartovanie postprocesora

SET,1 ! Načítanie výsledkov riešenia
PRNSOL,U            ! Výpis premiestnení uzlov konštrukcie
PRRSOL              ! Výpis reakcií
PRNSOL,S            ! Výpis napätí v uzloch konštrukcie

PLDISP,2            ! Vykreslenie premiestnení
PLNSOL,UY            ! Vykreslenie izoplochy premiestnení UY
PLNSOL,UX            ! Vykreslenie izoplochy premiestnení UX
PLNSOL,SX            ! Vykreslenie izoplochy normálových napätí  $\sigma_x$ 
PLNSOL,SY            ! Vykreslenie izoplochy normálových napätí  $\sigma_y$ 
PLNSOL,SXY           ! Vykreslenie izoplochy šmykových napätí  $\tau_{xy}$ 

PATH,Rez1,2,30,20    ! Definovanie rezu "Rez1", prechádzajúceho 2 uzlami
_n1=NODE(0,0,0)      ! Premenná _n1 obsahuje číslo uzla so súradnicami
0,0,0
_n2=NODE(0,0,0)      ! Premenná _n2 obsahuje číslo uzla so súradnicami
0,3,0
LPATH,_n1,_n2        ! Rez prechádza uzlami _n1 a _n2
PDEF,SigmaX,S,X,AVG  ! Výpočet normálových napätí  $\sigma_x$  s názvom "SigmaX" v
reze
PDEF,TauXY,S,XY,AVG  ! Výpočet šmykových napätí  $\tau_{xy}$  s názvom "TauXY" v
reze
PRPATH,SigmaX,TauXY  ! Výpis napätí "SigmaX" a "TauXY" v reze
/GRID,1              ! Vykreslenie mriežky v grafe
/GTHK,CURVE,2        ! Vykreslenie krivky v grafe čiarou hrúbky 2
PLPATH,SigmaX,TauXY  ! Vykreslenie grafu napätí "SigmaX" a "TauXY" v
reze

/OUTPUT,stena,txt    ! Presmerovanie textového výstupu do súboru
"stena.txt"
PRNSOL,U            ! Výpis premiestnení uzlov
PRRSOL              ! Výpis reakcií
PRNSOL,S            ! Výpis napätí v uzloch
PRPATH,SigmaX,TAUXY  ! Výpis priebehu napätí v reze "SigmaX"
/OUTPUT              ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku
/SHOW,stena,grp,1    ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"stena.grp"
PLPATH,SigmaX,TauXY  ! Vykreslenie napätí "SigmaX" a "TauXY" v reze
/SHOW,TERM           ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku

FINISH              ! Ukončenie postprocesora
/EXIT ! Ukončenie práce v ANSYS

```

Ako ukážka výstupu je uvedená časť súboru STENA.TXT obsahujúca výpis napätí v reze, graf napätí v tom istom reze.

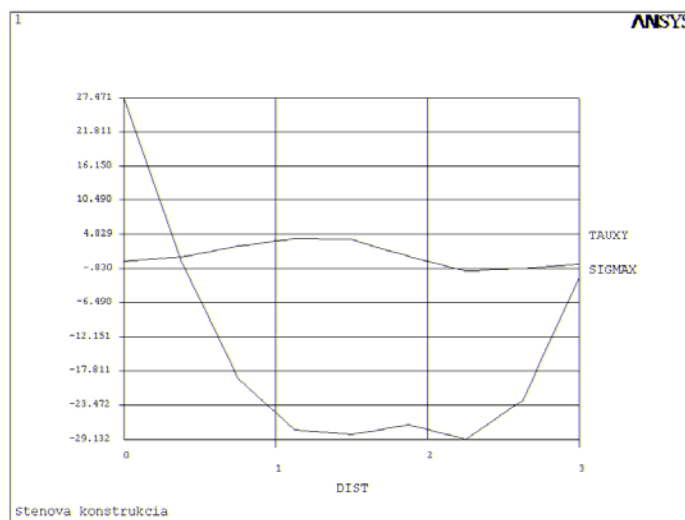
```
PRINT ALONG PATH DEFINED BY LPATH
COMMAND. DSYS= 0
```

***** PATH VARIABLE SUMMARY *****

S	SIGMAX	TAUXY
.00000	27.471	.28344
.62500E-01	22.967	.41617
.12500	18.463	.54889
.18750	13.959	.68162
.25000	9.4542	.81435
.31250	4.9499	.94708
.		
.		
.		
2.3125	-28.058	-1.1902
2.3750	-26.984	-1.1192
2.4375	-25.910	-1.0483
2.5000	-24.835	-.97738
2.5625	-23.761	-.90646

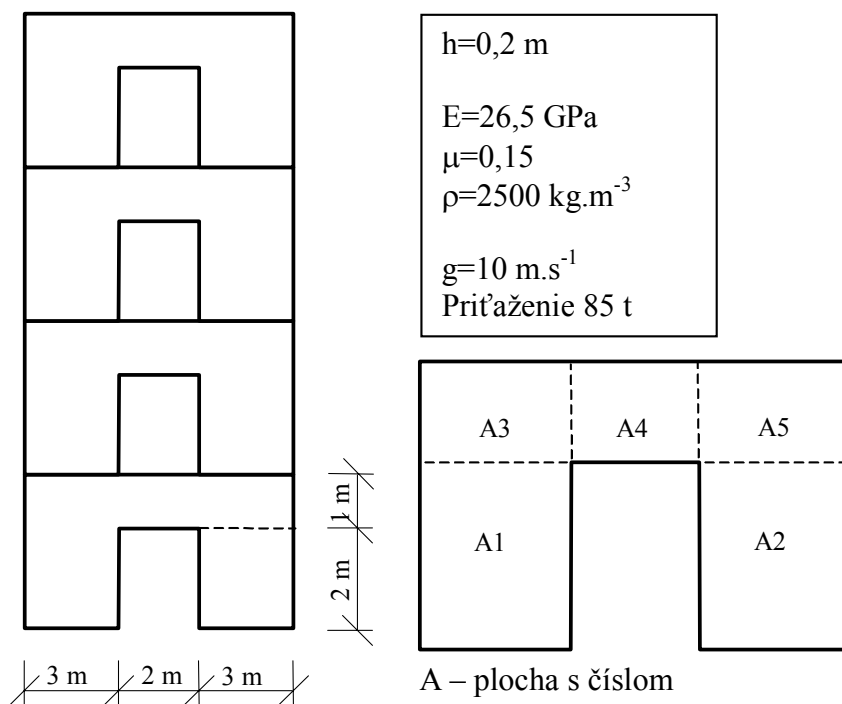
***** PATH VARIABLE SUMMARY *****

S	SIGMAX	TAUXY
2.6250	-22.687	-.83553
2.6875	-19.294	-.72245
2.7500	-15.900	-.60937
2.8125	-12.507	-.49629
2.8750	-9.1133	-.38321
2.9375	-5.7199	-.27013
3.0000	-2.3265	-.15705



9.6 Rovinná stenová konštrukcia s otvormi

Urobte statický výpočet železobetónovej steny od vlastnej tiaže. V úrovni každého podlažia je sústredená hmota 85t rovnomerne rozložená po šírke steny.



Riešenie:

Na riešenie konštrukcie je použitý typ štvoruzlového prvku PLANE42, ktorý umožňuje definovať v každom uzle horizontálny a vertikálny posun UX, UY. Prit'azenie na úrovni podlažia je modelované hmotnými bodmi rozloženými v uzloch po šírke steny. Pre rozmiestnenie hmotných bodov sú využité príkazy jazyka APDL.

```
/TITLE,Stena s otvormi
/TRIAD,LTOP          ! Súradnicový systém je v ľavom hornom rohu
obrazovky

/PREP7              ! Štartovanie preprocesora

ET,1,PLANE42,,,3    ! Typ prvku č.1 (3 = prvok s vplyvom hrúbky)
ET,2,MASS21,,,4     ! Typ prvku č.2 (4 = hmotný bod v rovine XY)
ETLIST              ! Výpis typov prvkov

R,1,.2              ! Real č.1 - hrúbka steny
RLIST ! Výpis reálnych konštánt

MP,EX,1,26.5e6      ! Materiál č.1 - modul pružnosti
MP,NUXY,1,0.15      ! Materiál č.1 - Poissonovo číslo
MP,DENS,1,2.5       ! Materiál č.1 - objemová tiaž
```

```

MPLIST                                ! Výpis materiálových charakteristík

RECTNG,0,3,0,2                        !   Vytvorenie plochy   č.1   (súradnice   rohov
X1,X2,Y1,Y2)
RECTNG,5,8,0,2                        ! Vytvorenie plochy č.2
RECTNG,0,3,2,3                        ! Vytvorenie plochy č.3
RECTNG,3,5,2,3                        ! Vytvorenie plochy č.4
RECTNG,5,8,2,3                        ! Vytvorenie plochy č.5
AGEN,4,1,5,,3                        ! Kopirovanie plôch č.1 až č.5 pre 4 podlažia
NUMMRG,KP                             ! Zlúčenie totožných kľúčových bodov a línií
LESIZE,ALL,0.5                        ! Rozdelenie všetkých línií na dieliky po 0.5m
LPLOT                                 ! Vykreslenie línií

NSEL,S,LOC,Y,3                        ! Vyselektovanie uzlov na úrovni Y=3 m
*GET,_n,NODE,0,COUNT                  ! Zistenie počtu uzlov vo vyselektovanej úrovni
(_n)
ALLSEL                                ! Opätovné vyselektovanie celého modelu
_m1=85/_n                             ! Výpočet hmotnosti 1 hmotného bodu
R,2,_m1                              ! Real č.2 - hmotnosť 1 hmotného bodu
RLIST ! Výpis reálnych konštánt

TYPE,1                                ! Stena - typ prvku č.1
MAT,1                                 ! Stena - materiál č.1
REAL,1                               ! Stena - real č.1 (resp. prierez č.1)
AMESH,ALL                            ! Vygenerovanie prvkov na všetkých plochách

TYPE,2                                ! Hmotný bod - typ prvku č.2
REAL,2                               ! Hmotný bod - real č.2
*GET,_nnode,NODE,0,COUNT              ! Zistenie počtu uzlov v celej konštrukcii
(_nnode)
*DO,_i,1,_nnode                       ! Cyklus cez každý uzol konštrukcie
  *IF,NY(_i),EQ,3,THEN                 ! Ak je Y-suradnica uzla 3 m
    E,_i                              !   potom sa generuje v uzle prvok (hmotný bod)
  *ELSEIF,NY(_i),EQ,6                 ! Ak je Y-suradnica uzla 6 m
    E,_i                              !   potom sa generuje v uzle prvok (hmotný bod)
  *ELSEIF,NY(_i),EQ,9                 ! Ak je Y-suradnica uzla 9 m
    E,_i                              !   potom sa generuje v uzle prvok (hmotný bod)
  *ELSEIF,NY(_i),EQ,12                ! Ak je Y-suradnica uzla 12 m
    E,_i                              !   potom sa generuje v uzle prvok (hmotný bod)
  *ENDIF                              ! Koniec bloku vetvenia
*ENDDO                                ! Koniec cyklu

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
FINISH                               ! Ukončenie preprocesora

/SOLU                                ! Štartovanie solvera

NSEL,S,LOC,Y,0                        ! Vyselektovanie uzlov so súradnicou Y=0
D,ALL,ALL                            ! Vo vyselektovaných uzloch je votknutie
ALLSEL                                ! Opätovné vyselektovanie celého modelu
ACEL,0,10                            ! Gravitačné zrýchlenia v smere Y

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
SOLVE ! Riešenie úlohy (jeden zaťažovací stav)
FINISH                               ! Ukončenie solvera

/POST1                               ! Štartovanie postprocesora

SET,1                                ! Načítanie výsledkov riešenia
PRRSOL                               ! Výpis reakcií
PRNSOL,U                             ! Výpis premiestnení

```

```

PRNSOL,S                ! Výpis napätí
PLNSOL,U,X              ! Vykreslenie premiestnení v smere X
PLNSOL,U,Y              ! Vykreslenie premiestnení v smere Y
PLNSOL,S,X              ! Vykreslenie normálových napätí v smere X
PLNSOL,S,Y              ! Vykreslenie normálových napätí v smere Y
PLNSOL,S,XY             ! Vykreslenie šmykových napätí v rovine XY

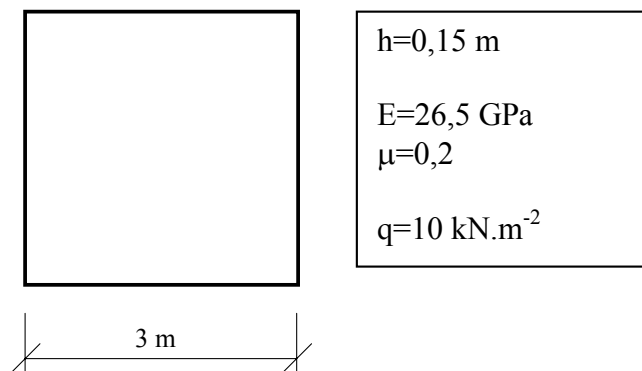
/OUTPUT,stena,txt       ! Presmerovanie textového výstupu do súboru
"stena.txt"
PRNSOL,U                ! Výpis premiestnení uzlov
PRRSOL                  ! Výpis reakcií
PRNSOL,S                ! Výpis napätí v uzloch
/OUTPUT                 ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku
/SHOW,stena,grp         ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru
"stena.grp"
PLNSOL,U,X              ! Vykreslenie premiestnení v smere X
PLNSOL,U,Y              ! Vykreslenie premiestnení v smere Y
PLNSOL,S,X              ! Vykreslenie normálových napätí v smere X
PLNSOL,S,Y              ! Vykreslenie normálových napätí v smere Y
PLNSOL,S,XY             ! Vykreslenie šmykových napätí v rovine XY
/SHOW,TERM              ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku

FINISH                  ! Ukončenie postprocesora
/EXIT ! Ukončenie práce v ANSYS

```

9.7 Dosková konštrukcia

Urobte statický výpočet štvorcovej železobetónovej dosky zaťaženej spojitým zaťažením. Doska je kĺbovo uložená po obvode. Úlohu riešte pre rôzne hustoty delenia. Porovnajte presnosť riešenia a potrebný strojový čas riešenia každej alternatívy hustoty delenia.



Riešenie:

Na riešenie konštrukcie je použitý typ štvoruzlového prvku SHELL63, ktorý umožňuje definovať v každom uzle posuny a pootočenia UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ. Prvok SHELL63 bude iba s ohybovou tuhosťou. Úlohu je výhodné riešiť pomocou

makra so vstupnými parametrami. Ako vstupné parametre budeme používať počet dielikov v smere X a Y.

Celý postup výpočtu, ako je uvedený, zapíšeme do súboru s názvom DOSKA.MAC. Ak potom chceme spustiť výpočet napr. pre dosku s delením 6x6, stačí do okna "Input Line" zapísať príkaz:

```
DOSKA, 6, 6, 'v6'
```

Výsledné údaje budú uložené v súbore v6.txt a v6.grph. Protokol o výpočte bude v súbore v6.out.

```
/TITLE, Stvorcova doska
/TRIAD, LTOP          ! Súradnicový systém je v ľavom hornom rohu
obrazovky

_dx=ARG1              ! Počet dielikov v smere X (_dx) ako 1.argument
makra
_dy=ARG2              ! Počet dielikov v smere X (_dx) ako 2.argument
makra
_meno=ARG3            ! Názov riešenej alternatívy (bude použité v názve
súborov)

/PREP7                ! Štartovanie preprocesora

ET, 1, SHELL63, 2     ! Typ prvku č.1 (2 = prvok iba s ohybovou tuhosťou)
ETLIST               ! Výpis typov prvkov

R, 1, .15             ! Real č.1 - hrúbka dosky
RLIST ! Výpis reálnych konštánt

MP, EX, 1, 26.5e6     ! Materiál č.1 - modul pružnosti
MP, NUXY, 1, 0.2      ! Materiál č.1 - Poissonovo číslo
MPLIST               ! Výpis materiálových charakteristík

RECTNG, 0, 3, 0, 3    ! Vytvorenie plochy č.1 (súradnice rohov
X1, X2, Y1, Y2)
LESIZE, 1, , , _dx    ! Rozdelenie línie č.1 na _dx dielikov
LESIZE, 3, , , _dx    ! Rozdelenie línie č.3 na _dx dielikov
LESIZE, 2, , , _dy    ! Rozdelenie línie č.2 na _dy dielikov
LESIZE, 4, , , _dy    ! Rozdelenie línie č.4 na _dy dielikov
LPLOT                ! Vykreslenie línií

TYPE, 1              ! Doska - typ prvku č.1
MAT, 1               ! Doska - materiál č.1
REAL, 1              ! Doska - prierez č.1
AMESH, ALL           ! Vygenerovanie prvkov na celej doske

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
FINISH              ! Ukončenie preprocesora

/SOLU                ! Štartovanie solvera

NSEL, S, LOC, Y, 0    ! Vyselektovanie uzlov so súradnicou Y=0
NSEL, A, LOC, Y, 3    ! Vyselektovanie ďalších uzlov so súradnicou Y=3
D, ALL, UX           ! Vo všetkých uzloch je podopretie v smere X
D, ALL, UY           ! Vo všetkých uzloch je podopretie v smere Y
```

```

D,ALL,UZ          ! Vo všetkých uzloch je podopretie v smere Z
ALLSEL            ! Opätovné vyselektovanie celého modelu
NSSEL,S,LOC,X,0   ! Vyselektovanie uzlov so súradnicou X=0
NSSEL,A,LOC,X,3   ! Vyselektovanie ďalších uzlov so súradnicou X=3
D,ALL,UX          ! Vo všetkých uzloch je podopretie v smere X
D,ALL,UY          ! Vo všetkých uzloch je podopretie v smere Y
D,ALL,UZ          ! Vo všetkých uzloch je podopretie v smere Z
ALLSEL            ! Opätovné vyselektovanie celého modelu
DLIST ! Výpis uzlov s okrajovou podmienkou

SFA,ALL,1,PRES,-10 ! Na plochu pôsobí spojité zaťaženie
SFTRAN            ! Transfer zaťaženia z plochy na prvky

SAVE ! Zápis do binárneho súboru typu DB
/OUTPUT,%_meno%,out ! Presmerovanie textového výstupu riešenia do
súboru ".out"
SOLVE ! Riešenie úlohy (jeden zaťažovací stav)
FINISH            ! Ukončenie solvera
/OUTPUT            ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku

/POST1            ! Štartovanie postprocesora

SET,1             ! Načítanie výsledkov riešenia
ETABLE,mx,SMIS,4  ! Výpočet ohybových momentov mx

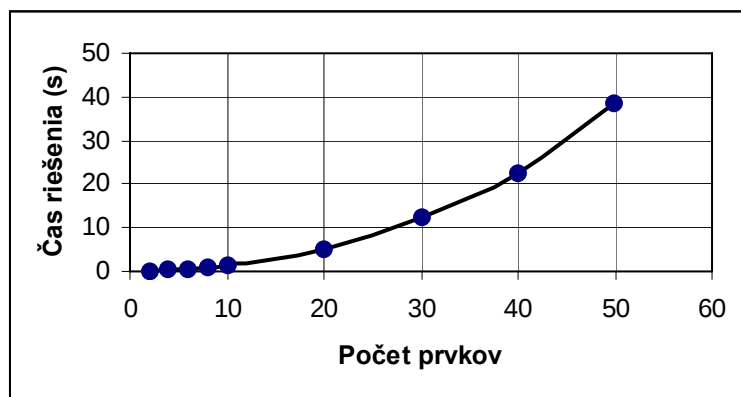
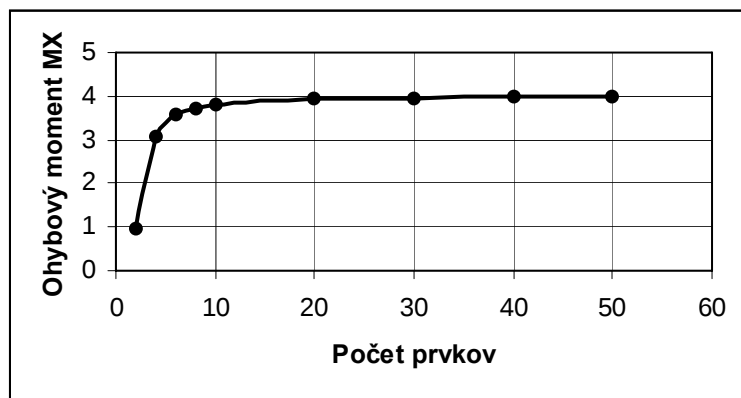
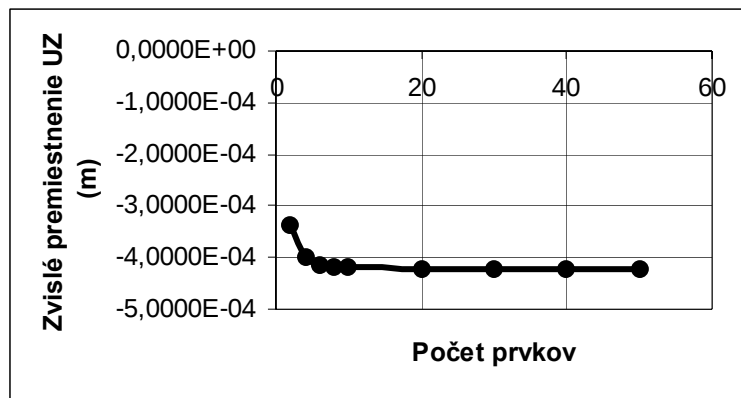
PRRSOL            ! Výpis reakcii
PRNSOL,U          ! Výpis premiestnení
PRETAB            ! Výpis ohybových momentov
PLNSOL,U,Z        ! Vykreslenie premiestnení v smere Z (priehyb)
PLETAB,mx,AVG     ! Vykreslenie ohybových momentov mx

/OUTPUT,%_meno%,txt ! Presmerovanie textového výstupu do súboru ".txt"
PRNSOL,U          ! Výpis premiestnení
PRETAB            ! Výpis ohybových momentov
/OUTPUT            ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku
/SHOW,%_meno%,grp ! Presmerovanie grafického výstupu do súboru ".grp"
PLNSOL,U,Z        ! Vykreslenie premiestnení v smere Z (priehyb)
PLETAB,mx,AVG     ! Vykreslenie ohybových momentov mx
/SHOW,TERM        ! Presmerovanie výstupu späť na obrazovku

FINISH            ! Ukončenie postprocesora
/EXIT ! Ukončenie práce v ANSYS

```

Delenie	Priehyb w [x 10 ⁻⁴ m]	Ohybový moment Mx [kNm]	Čas výpočtu [s]
2 x 2	3,3874	0,969	0,120
4 x 4	3,9989	3,054	0,230
6 x 6	4,1290	3,556	0,500
8 x 8	4,1763	3,738	0,811
10 x 10	4,1985	3,842	1,382
20 x 20	4,2283	3,940	5,228
30 x 30	4,2339	3,961	12,228
40 x 40	4,2358	3,969	22,252
50 x 50	4,2367	3,972	38,525



16. METÓDA ADAPTÍVNYCH SIETI V SYSTÉME ANSYS

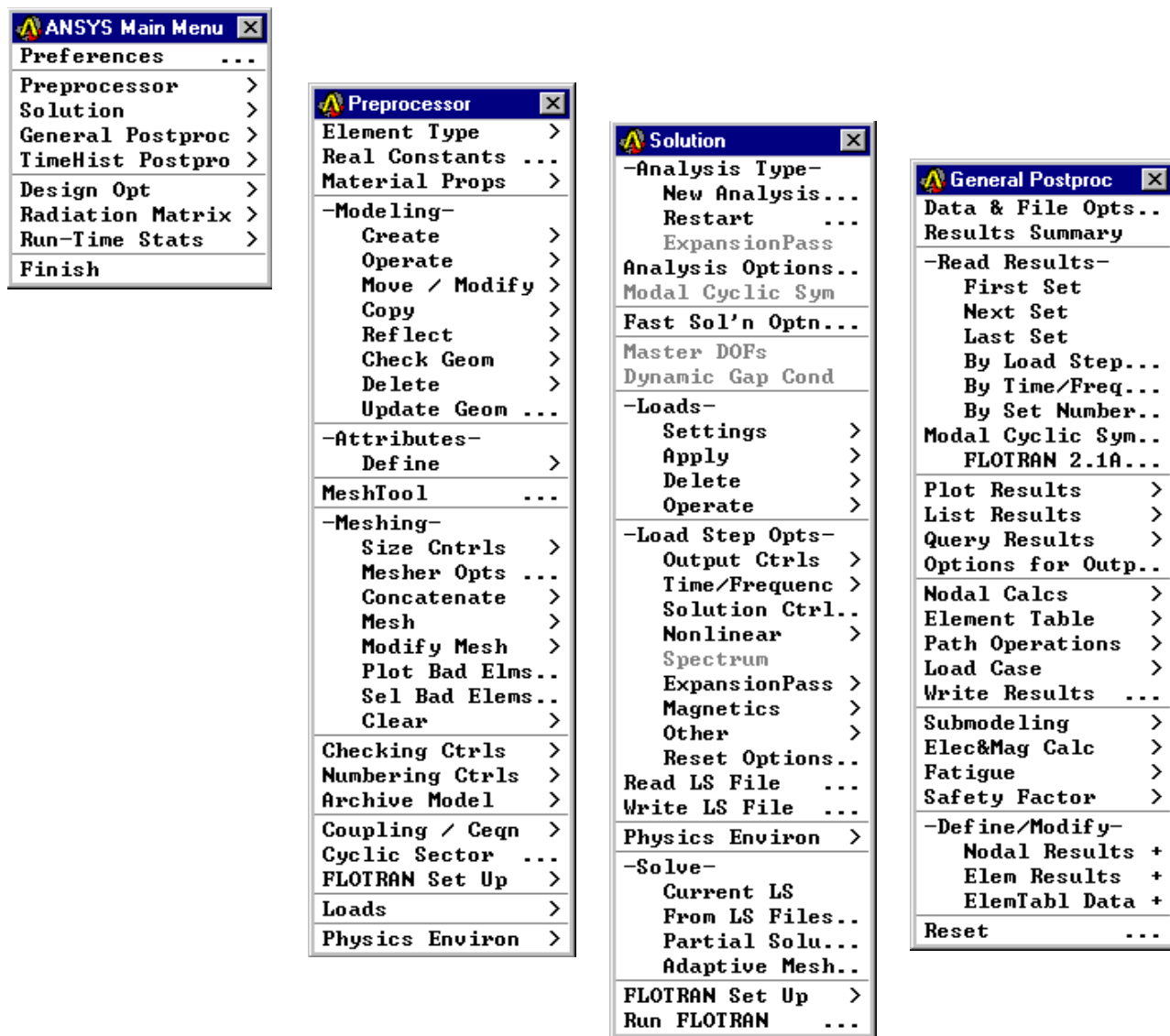
Príklad riešenia stavu napätosti steny s otvorom metódou adaptívnej siete

<pre> /UIS,MSGPOP,3 ! /BATCH,LIST /COM,ANSYS MEDIA REL.5.3 - /FILNAME,ADAPT FINISH /CLEAR ! /PREP7 SMRT,OFF /TITLE, Riesenie delenia metódou adaptívnej siete ! ! Použitie 2-D prvku PLANE42 ! ! SX_anal=100. ! ANTYPE,STATIC ET,1,PLANE42,,,3 hrubkou ! MP,EX,1,210E3 MP,NUXY,1,,3 R,1,0.02 K,1, RECTNG,,1,-.5,0.5 APLOT CYL4,,,0.2,-90,,90 LPLT ASBA,1,2 APLOT NUMCMP,ALL DL,5,1,SYMM DL,6,1,SYMM SFL,2,PRES,30,10 ESHAPE,3 SAVE FINISH ! ADAPT,4,7,,,1 *CREATE,MAC ! /POST1 !/RESET /PNUM,ELEM,1 ! EPLOT PRERR NSEL,S,LOC,X,0.0 NSEL,R,LOC,Y,-0.5 *GET,MNODE,NODE,,NUM,MAX *GET,SX_D,NODE,MNODE,S,X ALLSEL *STATUS SET,1 PLESOL,,SERR </pre>	<pre> ! Odblokovanie varovacich hlaseni ! Definovania davkovej ulohy ! Metoda adaptívnej siete ! deaktivovanie kontroly velkosti prvkov pri sietovaní ! Definovanie hodnoty napätia z analytického riešenia ! Definovanie statickej analýzy ! Definovanie typu prvku PLANE42 pre rov.napätost s ! Definovanie modulu pružnosti v MPa ! Definovanie poissonovej konstanty ! Hrubka steny 0,02m ! Definovanie klucového bodu 1(0,0) ! Definovanie obdĺžnikovej oblasti pre ! $x < 0,1$ a $y < -0.5, 0.5 >$ m ! Zobrazenie ploch ! Definovanie polkruhu so stredom v bode (0,0) ! polomerom $R=0.2$ a vysekom od -90o do 90o ! Zobrazenie ciar ! Odcítanie plochy 2 z plochy 1 ! Zobrazenie plochy ! Skomprimovanie číslovania všetkých entít ! Definovanie okrajových podmienok na hranici symetrie ! Def.lichobežníkového zatazenia na line 2 ! Def.volného delenia pre postupne zhustovanie ! Uloženie databázy ! Definovanie adaptívneho delenia siete ! pre počet riešení (NSOLN=4), perc.chyby (STARGT=7), ! a max.pomeru susedných hran prvkov (FACMX=1) ! Vytvorenie makra pre postprocesor ! Zobrazenie elementov ! Tlač normy percentuálnej chyby (SEPC) ! Selektovanie uzlov pre $X=0.0$! Vyselektovanie uzlu pre $X=0.0$ a $Y=-0.5$! MNODE je max.cislo vyselektovaného uzla ! Nacítanie napätia S_x ! Tlač nastavenia parametrov ! Zobrazenie normy chyby po prvkoch </pre>
--	--

*END	! Koniec makra
*USE,MAC	! Aktivovanie makra
*DIM,LABEL,CHAR,1,2	! Definovanie matice Label(1,2) pre texty
*DIM,VALUE,,1,3	! Definovanie matice Value(1,3) pre cisla
LABEL(1,1) = 'NORM STR'	! Definovanie textu do matice Label
LABEL(1,2) = ' MPa'	
*VFILL,VALUE(1,1),DATA,SX_anal	! Definovanie ciselných hodnot matice Value
*VFILL,VALUE(1,2),DATA,(SX_D)	
*VFILL,VALUE(1,3),DATA,ABS(SX_D/SX_anal)	
SAVE,ADAPT1,db	
FINISH	
/CLEAR, NOSTART	! vycistenie databazy pre startom casti 2
!	
! Pouzitie 2-D 8-uzlových prvkov, PLANE82	
!	
/PREP7	
SMRT,OFF	! Nacitanie databazy
RESUME	! Predefinovanie typu prvkov na PLANE82
ET,1,PLANE82,,,3	! pre rovinný stav napätosti s hrúbkou
FINISH	
ADAPT,2,5,,,1	! Spustenie ANSYS preddefinovaného makra pre adaptívne
delenie	! a pre parametre NSOLN=2, STARGT=5, a FACMX=1
*USE,MAC	! Spustenie postprocesorového makra
*DIM,VALUE,,1,3	
*DIM,LABEL,CHAR,1,2	
LABEL(1,1) = 'NORM STR'	
LABEL(1,2) = ' MPa'	
*VFILL,VALUE(1,1),DATA,SX_anal	
*VFILL,VALUE(1,2),DATA,(SX_D)	
*VFILL,VALUE(1,3),DATA,ABS(SX_D/SX_anal)	
!	
/OUTPUT,LST	! Definovanie výstupného súboru 'Filename'.lst
!	
/COM,----- Porovnanie riešenia -----	
/COM,	
/COM, Analyticke ANSYS Presnost	
/COM,	
!	
/COM,PLANE82 RESULTS:	
/COM,	
*VWRITE,LABEL(1,1),LABEL(1,2),VALUE(1,1),VALUE(1,2),VALUE(1,3)	
(1X,A8,A8,' ',F10.2,' ',F10.2,' ',F8.3)	
/NOPR	
RESUME,TABLE1	
/GOPR	
/COM,	
/COM,PLANE42 RESULTS:	
/COM,	
*VWRITE,LABEL(1,1),LABEL(1,2),VALUE(1,1),VALUE(1,2),VALUE(1,3)	
(1X,A8,A8,' ',F10.2,' ',F10.2,' ',F8.3)	
!	
/COM,-----	
/OUTPU	

17. STRUČNÝ PREHĽAD PRÍKAZOV V SYSTÉME ANSYS

ŠTRUKTÚRA PONUKY PRÍKAZOV PROGRAMU ANSYS



ANSYS Main Menu

Preprocessor

/PREP7

Štart preprocesora

FINISH

Ukončenie preprocesora

ANSYS Main Menu

Solution

/SOLU

Štart riešiča úlohy

FINISH

Ukončenie riešiča úlohy

ANSYS Main Menu

General Postproc

/POST1

Štart postprocesora

FINISH

Ukončenie postprocesora



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Element Type

Add/Edit/Delete

ET, *ITYPE*, *Ename*, *KOP1*, ..., *KOP6*, *INOPR*

Definovanie typu prvku

ETDELE, *ITYP1*, *ITYP2*, *INC*

Vymazanie typu prvku

KEYOPT, *ITYPE*, *KNUM*, *VALUE*

Nastavenie kľúčovej voľby prvku

ANSYS Main Menu / Preprocessor

Real Constants

R, *NSET*, *R1*, *R2*, *R3*, *R4*, *R5*, *R6*

Definovanie reálnej konštanty prvku

RDELE, *NSET1*, *NSET2*, *NINC*

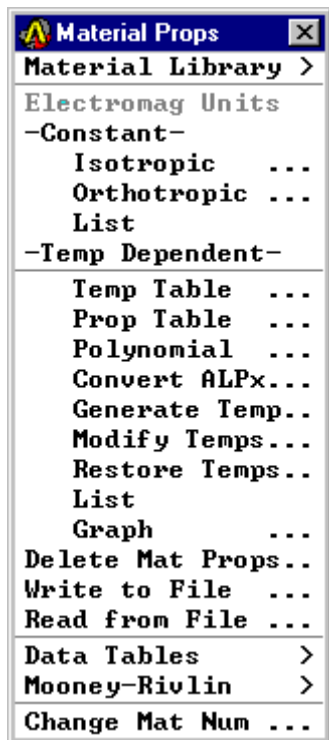
Vymazanie reálnej konštanty prvku

RMODIF, *NSET*, *STLOC*, *V1*, *V2*, *V3*, ..., *V6*

Zmena reálnej konštanty prvku

RMORE, *R7*, *R8*, *R9*, *R10*, *R11*, *R12*

Pridanie ďalších šesť reálnych konštánt prvku k definovanej sade konštánt



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Material Props

-Constant- Isotropic

UIMP, *MAT*, *Lab1*, *Lab2*, *Lab3*, *VAL1*, *VAL2*, *VAL3*

Definovanie materiálovej charakteristiky

-Constant- List

MPLIST, *MAT1*, *MAT2*, *INC*, *Lab*, *TEVL*

Výpis materiálových charakteristík

Delete Mat Props

MPDELE, *Lab*, *MAT1*, *MAT2*, *INC*

Vymazanie materiálovej charakteristiky

Write to File

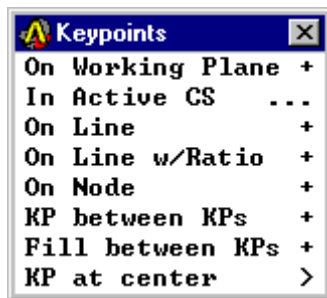
MPWRITE, *Fname*, *Ext*, *Dir*

Zápis materiálových charakteristík do súboru

Read from File

MPREAD, *Fname*, *Ext*, *Dir*

Čítanie materiálových charakteristík zo súboru



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Create / Keypoints

In Active CS

K, *NPT, X, Y, Z*

Definovanie súradnice kľúčového bodu

KMODIF, *NPT, X, Y, Z*

Modifikácia súradnice kľúčového bodu

OnLine

KL, *NLI, RATIO, NK1*

Definovanie kľúčového bodu na existujúcej línii

OnNode

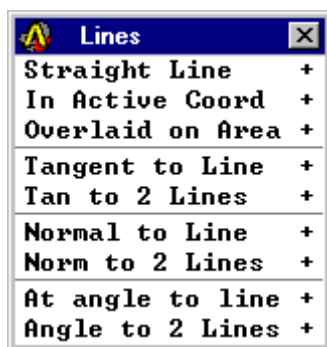
KNODE, *NPT, NODE*

Definovanie kľúčového bodu na pozícii existujúceho uzla

Fill between KPs

KFILL, *NP1, NP2, NFILL, NSTRT, NINC, SPACE*

Generuje kľúčové body vyplnením medzi dvoma definovanými kľúč. Bodmi



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Create / Lines

Straight Line

LSTR, *P1, P2*

Definovanie línie pomocou dvoch kľúčových bodov

In Active Coord

L, *P1, P2, NDIV, SPACE, XV1, YV1, ZV1, XV2, YV2, ZV2*

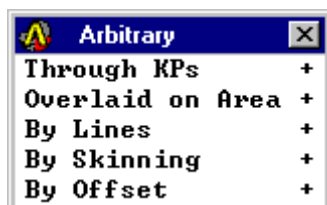
Definovanie línie pomocou dvoch kľúčových bodov a parametrov

Normal to Line

At angle to Line

LANG, *NLI, P3, ANG, PHIT*

Definovanie línie kolmo, resp. pod uhlom vzhľadom k inej línii



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Create / Arbitrary

Through KPs

A, *P1, ..., P9*

Definovanie plochy cez kľúčové body

By Lines

AL, *L1, ..., L10*

Definovanie plochy pomocou línii



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Create / Rectangle

By 2 Corners

BLC4, *XCORNER, YCORNER, WIDTH, HEIGHT, DEPTH*

Definovanie obdĺžnikovej plochy pomocou vrcholov a rozmerov obdĺžnika

By Centr & Cornr

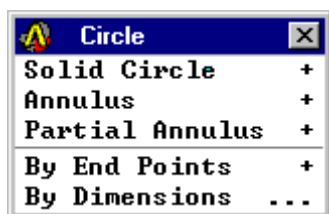
BLC4, *XCENTER, YCENTER, WIDTH, HEIGHT, DEPTH*

Definovanie obdĺžnikovej plochy pomocou stredu a rozmerov obdĺžnika

By Dimensions

RECTNG, *X1, X2, Y1, Y2*

Definovanie obdĺžnikovej plochy pomocou súradníc protiahlých vrcholov



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Create / Circle

Solid Circle

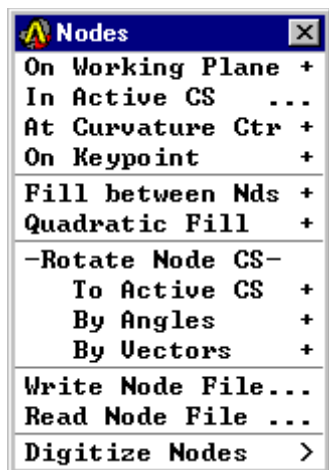
CYL4, *XCENTER, YCENTER, RAD1, THETA1, RAD2, THETA2, DEPTH*

Definovanie kruhovej, resp. prstencovej plochy pomocou súradníc stredu a polomeru

By Dimensions

PCIRC, *RAD1, RAD2, THETA1, THETA2*

Definovanie kruhovej, resp. prstencovej plochy



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Create / Nodes

In Active CS

N, *NODE, X, Y, Z, THXY, THYZ, THZX*

Definovanie uzla

On Keypoint

NKPT, *NODE, NPT*

Definovanie uzla na pozícii kľúčového bodu

Fill between Nds

FILL, *NODE1, NODE2, NFILL, NSTRT, NINC, ITIME, INC, SPACE*

Generovanie sady uzlov medzi dvomi existujúcimi uzlami

Write Node File

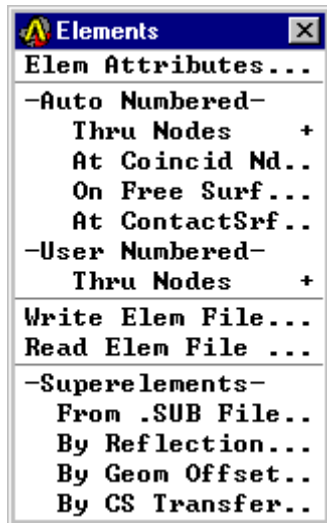
NWRITE, *Fname, Ext, Dir, KAPPND*

Zápis uzlov do súboru

Read Node File

NREAD, *Fname, Ext, Dir*

Načítanie uzlov zo súboru



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Create / Elements

Elem Attributes

TYPE, ITYPE

Nastavenie typu prvku

MAT, MAT

Nastavenie materiálovej charakteristiky prvku

REAL, REAL

Nastavenie reálnej konštanty prvku

ESYS, KCN

Nastavenie súradného systému prvku

-Auto Numbered- Thru Nodes

E, I, J, K, L, M, N, O, P

Definovanie prvku pomocou uzlov

-User Numbered- Thru Nodes

EN, IEL, I, J, K, L, M, N, O, P

Definovanie čísla prvku a prvku pomocou uzlov

Write Elem File

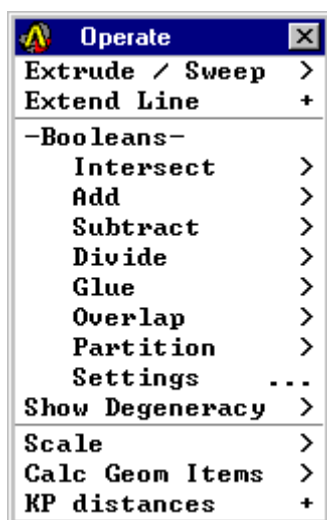
EWRITE, Fname, Ext, Dir, KAPPND

Zápis prvkov do súboru

Read Elem File

ERead, Fname, Ext, Dir

Načítanie prvkov zo súboru



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Operate

Extend Line

LEXTND, NLI, NKI, DIST, KEEP

Predĺženie línie

-Booleans- Intersect / Common Line

LINL, NLI, ..., NL9

Nájdienie priesečníka línii

-Booleans- Intersect / Common Areas

AINA, NAI, ..., NA9

Nájdienie priesečníka plôch

-Booleans- Intersect / Line with Area

LINA, NL, NA

Nájdenie priesečníka línie a plochy

-Booleans- Add / Areas

AADD, *NA1*, ..., *NA9*

Spojenie plôch do jednej plochy

-Booleans- Add / Lines

LCOMB, *NL1*, *NL2*, *KEEP*

Spojenie dvoch línií do jednej línie

-Booleans- Subtract / Areas

Divide / Area by Area

ASBA, *NA1*, *NA2*

Odčítanie plochy od plochy, resp. rozdelenie plochy plochou

-Booleans- Subtract / Lines

Divide / Line by Line

LSBL, *NL1*, *NL2*

Odčítanie línie od línie, resp. rozdelenie línie líniou

-Booleans- Divide / Area by Line

ASBL, *NA*, *NL*

Rozdelenie plochy líniou

-Booleans- Divide / Line by Area

LSBA, *NL*, *NA*

Rozdelenie línie plochou

-Booleans- Divide / Line into 2 Ln's

-Booleans- Divide / Line into N Ln's

-Booleans- Divide / Line with Options

LDIV, *NL1*, *RATIO*, *PDIV*, *NDIV*, *KEEP*

Rozdelenie línie na dve, resp. niekoľko častí

-Booleans- Settings

BOPTN, *Keep*, *NWARN*

Definovanie spoločných parametrov pre operácie

BTOL, *PTOL*

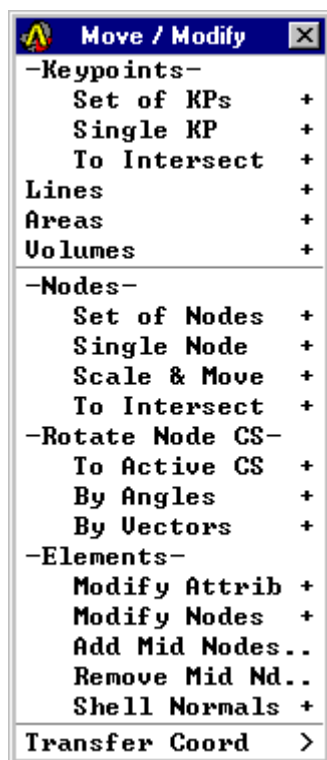
Definovanie toleranciu pre operácie

Calc Geom Items / Of Lines

LSUM

Výpočet a výpis geometrických vlastností línií

Calc Geom Items / Of Areas



ASUM

Výpočet a výpis geometrických vlastností plôch

ANSYS Main Menu / Preprocessor / Move/Modify

-Keypoints- Set of KPs

Single KP

KMODIF, *NPT, X, Y, Z*

Modifikácia súradníc kľúčových bodov

Lines

LGEN, *ITIME, NL1, NL2, NINC, DX, DY, DZ, KINC, NOELEM, IMOVE*

Modifikácia línie

Areas

AGEN, *ITIME, NA1, NA2, NINC, DX, DY, DZ, KINC, NOELEM, IMOVE*

Modifikácia plochy

-Nodes- Set of Nodes

-Nodes- Single Node

-Rotate Node CS- By Angles

NMODIF, *NODE, X, Y, Z, THXY, THYZ, THZX*

Modifikovanie súradníc uzla, resp. uzlového súradného systému

-Rotate Node CS- To Active CS

NROTAT, *NODE1, NODE2, NINC*

Modifikovanie uzlového súradného systému podľa aktívneho súr. systému

-Rotate Node CS- By Vectors

NANG, *NODE, X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2, X3, Y3, Z3*

Modifikovanie uzlového súradného systému podľa smerových cosínov

-Elements- Modify Attrib

-Elements- Modify Nodes

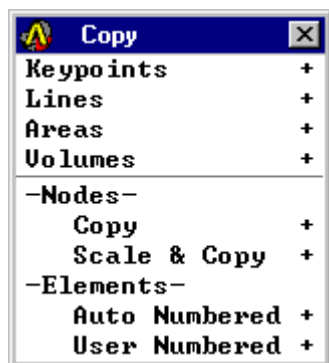
EMODIF, *IEL, STLOC, I1, ..., I8*

Modifikovanie atribútov alebo uzlov prvku

-Elements- Add Mid Nodes

EMID, *KEY*

Nastavenie generovania medziuzlov prvku



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Copy

Keypoints

KGEN, *ITIME*, *NP1*, *NP2*, *NINC*, *DX*, *DY*, *DZ*, *KINC*, *NOELEM*, *MOVE*

Generovanie kľúčových bodov kopírovaním zadaného zoznamu

Lines

LGEN, *ITIME*, *NL1*, *NL2*, *NINC*, *DX*, *DY*, *DZ*, *KINC*, *NOELEM*, *MOVE*

Generovanie línií kopírovaním zadaného zoznamu

Areas

AGEN, *ITIME*, *NA1*, *NA2*, *NINC*, *DX*, *DY*, *DZ*, *KINC*, *NOELEM*, *MOVE*

Generovanie plôch kopírovaním zadaného zoznamu

-Nodes- Copy

NGEN, *ITIME*, *INC*, *NODE1*, *NODE2*, *NINC*, *DX*, *DY*, *DZ*, *SPACE*

Generovanie uzlov kopírovaním zadaného zoznamu

-Elements- Auto Numbered

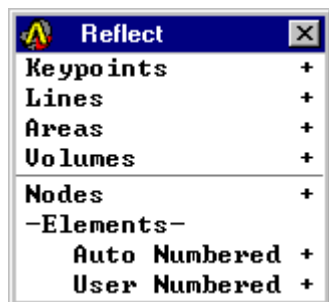
EGEN, *ITIME*, *NINC*, *IEL1*, *IEL2*, *IEINC*, *MINC*, *TINC*, *RINC*, *CINC*

Generovanie prvkov s automatickým číslovaním kopírovaním zadaného zoznamu

-Elements- User Numbered

ENGEN, *IINC*, *ITIME*, *NINC*, *IEL1*, *IEL2*, *IEINC*, *MINC*, *TINC*, *RINC*, *CINC*

Generovanie prvkov s ich číslovaním zadaným užívateľom kopírovaním zadaného zoznamu



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Reflect

Keypoints

KSYMM, *Ncomp*, *NP1*, *NP2*, *NINC*, *KINC*, *NOELEM*, *MOVE*

Generovanie kľúčových bodov zrkadlením

Lines

LSYMM, *Ncomp*, *NL1*, *NL2*, *NINC*, *KINC*, *NOELEM*, *MOVE*

Generovanie línií zrkadlením

Areas

ARSYM, *Ncomp*, *NA1*, *NA2*, *NINC*, *KINC*, *NOELEM*, *MOVE*

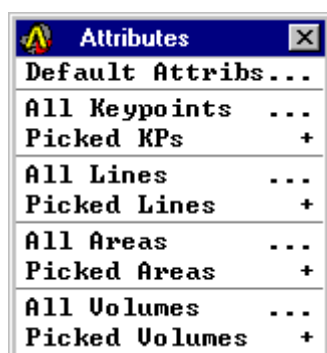
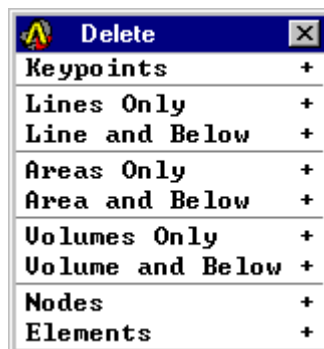
Generovanie plôch zrkadlením

Nodes

NSYM, *Ncomp*, *INC*, *NODE1*, *NODE2*, *NINC*

Generovanie uzlov zrkadlením

-Elements- Auto Numbered



ESYM, , NINC, IEL1, IEL2, EINC

Generovanie prvkov zrkadlením s automatickým číslaním

-Elements- User Numbered

ENSYM, IINC, , NINC, IEL1, IEL2, IEINC

Generovanie prvkov zrkadlením s číslaním zadávaným užívateľom

ANSYS Main Menu / Preprocessor / Delete

Keypoints

KDELE, NP1, NP2, NINC

Vymazanie kľúčových bodov

Lines Only

Line and Below

LDELE, NL1, NL2, NINC, KSWP

Vymazanie línií, resp. línií a ich kľúčových bodov

Areas Only

Area and Below

ADELE, NA1, NA2, NINC, KSWP

Vymazanie definovaných plôch, resp. plôch a ich línií a kľúčových bodov

Nodes

NDELE, NODE1, NODE2, NINC

Vymazanie zadaných uzlov (od *NODE1* do *NODE2* po *NINC*)

Elements

EDELE, IEL1, IEL2, INC

Vymazanie definovaných prvkov (od *IEL1* do *IEL2* po *INC*)

ANSYS Main Menu / Preprocessor / -Meshing- Attributes

Default Attribs

TYPE, ITYPE

Nastavenie typu prvku

MAT, MAT

Nastavenie materiálovej charakteristiky prvku

REAL, REAL

Nastavenie reálnej konštanty prvku

ESYS, KCN

Nastavenie súradného systému prvku

All Keypoints

Picked KPs

KATT, MAT, REAL, TZPE, ESYS

Nastavenie atribútov kľúčového bodu

All Lines

Picked Lines

LATT, MAT, REAL, TYPE, ESYS

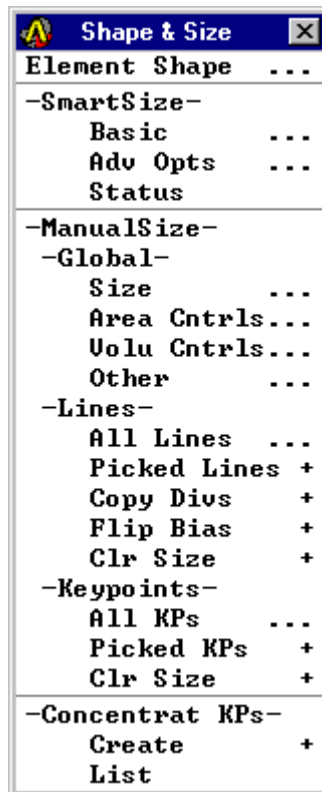
Nastavenie atribútov línie

All Areas

Picked Areas

AATT, MAT, REAL, TZPE, ESYS

Nastavenie atribútov plochy



ANSYS Main Menu / Preprocessor / -Meshing- Attributes

Element Shape

ESHAPE, KSHAPE, KSTR

Nastavenie tvaru generovaných prvkov

-Manual Size- -Global- Size

ESIZE, SIZE, NDIV

Nastavenie parametrov prvkov generovaných na línii

-Manual Size- -Global- Area Cntrls

MOPT, Lab, Value

Nastavenie parametrov prvkov generovaných na ploche

-Manual Size- -Lines- All Lines

-Manual Size- -Lines- Picked Lines

-Manual Size- -Lines- Clr Size

LESIZE, NLI, SIZE, ANGSIZ, NDIV, SPACE, KFORC

Nastavenie parametrov delenia línie na prútové prvky

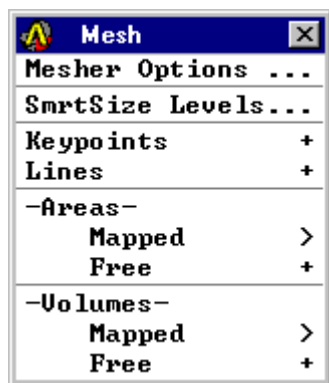
-Manual Size- -Keypoints- All KPs

-Manual Size- -Keypoints- Picked KPs

-Manual Size- -Keypoints- Clr Size

KESIZE, NPT, SIZE, FACT1, FACT2

Nastavenie veľkosti prvkov v okolí kľúčových bodov



ANSYS Main Menu / Preprocessor / -Meshing- Mesh

Mesher Options

MOPT, *Lab, Value*

Nastavenie parametrov generovaných prvkov

Keypoints

KMESH, *NP1, NP2, NINC*

Generovanie uzlov v okolí kľúčových bodov

Lines

LMESH, *NL1, NL2, NINC*

Generovanie prvkov na línii

-Areas- Mapped / -Concatenate- Lines

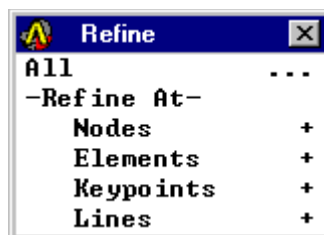
LCCAT, *NL1, NL2*

Spojí dve línie do jednej iba pre generovanie prvkov

-Areas- Free

AMESH, *NA1, NA2, NINC*

Generovanie prvkov na ploche



ANSYS Main Menu / Preprocessor / -Meshing- Refine

All

-Refine At- Elements

EREFINE, *NE1, NE2, NINC, NSPLT, DEPTH, SMOOTH*

Zjemnenie delenia v okolí vybraných prvkov

-Refine At- Nodes

NREFINE, *NN1, NN2, NINC, NSPLT, DEPTH, SMOOTH*

Zjemnenie delenia v okolí vybraných uzlovov

-Refine At- Keypoints

KREFINE, *NP1, NP2, NINC, NSPLT, DEPTH, SMOOTH*

Zjemnenie delenia v okolí vybraných kľúčových bodov

-Refine At- Lines

LREFINE, *NL1, NL2, NINC, NSPLT, DEPTH, SMOOTH*

Zjemnenie delenia v okolí vybraných línii

ANSYS Main Menu / Preprocessor

-Meshing- Check Elems

CHECK, *Sele, Lev1*

Kontrola tvaru vygenerovaných prvkov



ANSYS Main Menu / Preprocessor / -Meshing- Clear

Keypoints

KCLEAR, *NP1, NP2, NINC*

Vymazanie uzlov a bodových prvkov priradených ku kľúčovým bodom

Lines

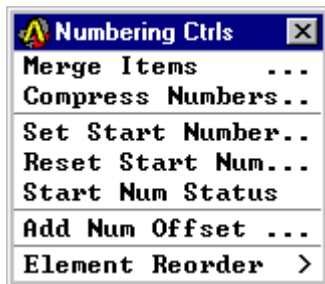
LCLEAR, *NL1, NL2, NINC*

Vymazanie uzlov a prútových prvkov priradených k líniam

Areas

ACLEAR, *NA1, NA2, NINC*

Vymazanie uzlov a plošných prvkov priradených k plochám



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Numbering Ctrl's

Merge Items

NUMMRG, *Label, TOLER, GTOLER*

Spojenie tototžných položiek (uzol, element, atď.) do jednej

Compress Numbers

NUMCMP, *Label*

Kompresovanie číslovania položiek

Set Start Number

Reset Start Number

Start Num Status

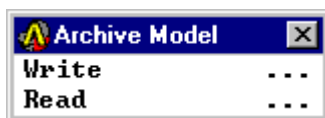
NUMSTR, *Label, VALUE*

Nastavenie počiatku číslovania automaticky číslovaných položiek

Add Num Offset

NUMOFF, *Label, VALUE*

Pridanie čísla k automaticky číslovaným položkám



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Archive Model

Write

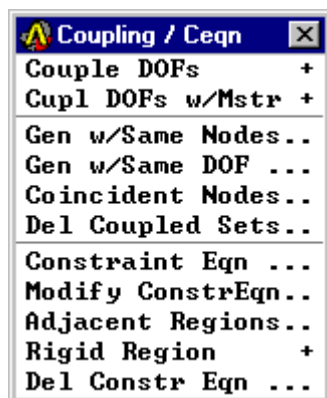
CDWRITE, *Option, Fname, Ext, Dir, Fnamei, Exti*

Zapísanie geometrie a zaťaženia modelu do súboru

Read

CDREAD, *Option, Fname, Ext, Dir, Fnamei, Exti*

Čítanie geometrie a zaťaženia modelu zo súboru



ANSYS Main Menu / Preprocessor / Coupling/Ceqn

Couple DOFs

Cupl DOFs w/Mstr

CP, NSET, Lab, NODE1, NODE2, ... , NODE9

Definovanie spoločných posunov a rotácií uzlov

Coincident Nodes

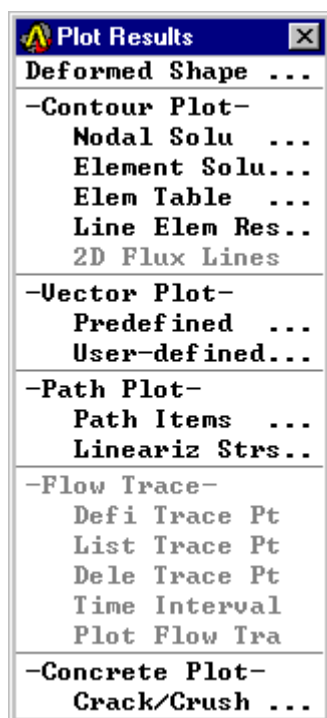
CPINTF, Lab, TOLER

Generovanie spoločných posunov a rotácií v skupine blízkych uzlov

Del Coupled Sets

CPDELE, NSET1, NSET2, NINC, Nsel

Vymazanie už definovaných spoločných posunov a rotácií uzlov



ANSYS Main Menu / General Postproc

-Read Results- First Step

-Read Results- Next Step

-Read Results- Last Step

-Read Results- By Load Step

-Read Results- By Set Number

SET, LSTEP, SBSTEP, FACT, KIMG, TIME, ANGLE

Načítanie výsledkov výpočtu zaťažovacieho kroku

ANSYS Main Menu / General Postproc / Plot Results

Deformed Shape

PLDISP, KUND, KSCAL

Vykreslenie premiestnenia uzlov

-Contour Plot- Nodal Solu

PLNSOL, Item, Comp

Vykreslenie výsledkov v uzloch

-Contour Plot- Element Solu

PLESOL, Item, Comp

Vykreslenie výsledkov pre prvky

-Contour Plot- Elem Table

PLETAB, Itlab, Avglab

Vykreslenie výsledkov definovaných v tabuľke

-Contour Plot- Line Elem Res

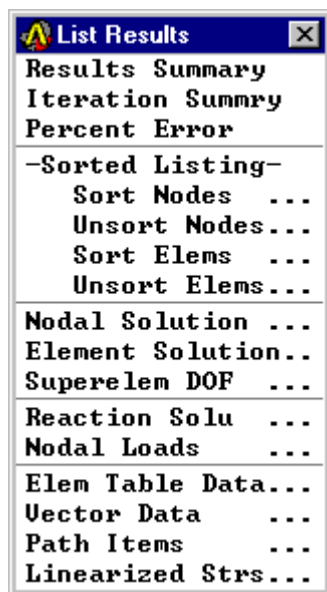
PLLS, Lab1, LabJ

Vykreslenie výsledkov pre prútové prvky

-Path Plot- Path Items

PLPATH, Lab1, Lab2, ... , Lab6

Vykreslenie výsledkov v definovanom reze



ANSYS Main Menu / General Postproc / List Results

Results Summary

SET, *LSTEP*, *SBSTEP*, *FACT*, *KIMG*, *TIME*, *ANGLE*

Výpis zoznamu zaťažovacích krokov

Percent Error

PRERR

Výpis chyby výpočtu

Nodal Solution

PRNSOL, *Item*, *Comp*

Výpis výsledkov v uzloch

Element Solution

PRESOL, *Item*

Výpis výsledkov pre prvky

Reaction Solu

PRRSOL, *Lab*

Výpis reakcií

Nodal Loads

PRNLD, *Lab*, *TOL*

Výpis uzlových zaťažení

Elem Table Data

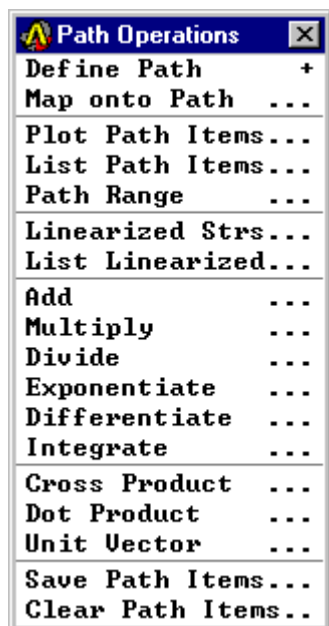
PRETAB, *Lab1*, *Lab2*, ... , *Lab10*

Výpis hodnôt definovaných v tabuľke

Path Items

PRPATH, *Lab1*, *Lab2*, ... , *Lab6*

Výpis výsledkov v definovanom reze



ANSYS Main Menu / General Postproc / Path Operations

Define Path

Save Path Items

Clear Path Items

LPATH, *NODE1*, *NODE2*, ... , *NODE10*

Definovanie rezu cez príslušné uzly

Uloženie hodnôt v definovanom reze

Vymazanie hodnôt vypočítaných pre definovaný rez

Map onto Path

PDEF, *Lab*, *Item*, *Comp*

Výpočet požadovanej výstupnej hodnoty v reze

Plot Path Items

PLPATH, *Lab1*, *Lab2*, ... , *Lab6*

Vykreslenie výsledkov v definovanom reze

List Path Items

PRPATH, *Lab1*, *Lab2*, ... , *Lab6*

Výpis výsledkov v definovanom reze

Add

Multiply

Divide

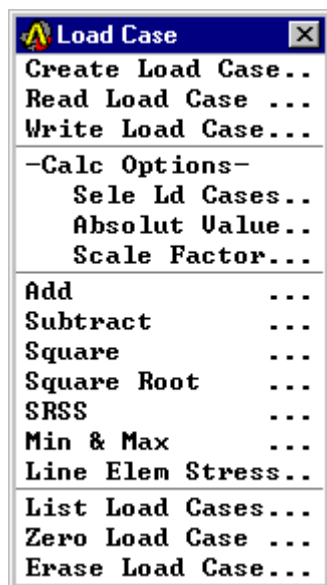
Exponentiate

Differentiate

Integrate

PCALC, *Oper*, *LabR*, *Lab1*, *Lab2*, *FACT1*, *FACT2*, *CONST*

Výpočet nových hodnôt v definovanom reze z existujúcich hodnôt



ANSYS Main Menu / General Postproc / Load Case

Create Load Case

List Load Cases

Erase Load Case

LCDEF, *LCNO*, *LSTEP*, *SBSTEP*, *KIMG*

Definovanie zaťažovacieho kroku

Výpis zoznamu zaťažovacích krokov

Vymazanie zaťažovacieho kroku

LCFILE, *LCNO*, *Fname*, *Ext*, *Dir*

Definovanie zaťažovacieho kroku z dát v súbore

Read Load Case

LCASE, *LCNO*

Čítanie zaťažovacieho kroku

Write Load Case

LCWRITE, *LCNO*, *Fname*, *Ext*, *Dir*

Zápis zaťažovacieho kroku do súboru

-Calc Options- Sele Ld Cases

LCSEL, *Type*, *LSMIN*, *LCMAX*, *LCINC*

Vyselektovanie zaťažovacieho kroku

-Calc Options- Scale Factor

LCFACT, *LCNO*, *FACT*

Násobenie hodnôt v zaťažovacom kroku koeficientom

Add

Subtract

Square

Square Root

SRSS

Min & Max

Line Elem Stresses

LCOPER, *Oper*, *LCASE1*, *Oper2*, *LCASE2*

Vykonanie matematických operácií medzi zaťažovacími krokmi

Zero Load Case

LCZERO

Vynulovanie zaťažovacieho kroku

ANSYS Main Menu / General Postproc /

Reset



RESET

Inicializácia postprocesora

ANSYS Utility Menu / File

Clear & Start New

/CLEAR, *Read*

Vynulovanie databázy

Change Jobname

/FILENAME, *Fname*

Zmena mena databázy

Change Title

/TITLE, *Title*

Nastavenie alebo zmena popisu úlohy

Resume Jobname.db

Resume from

RESUME, *Fname, Ext, Dir, NOPAR*

Načítanie databázy zo súboru Dir:/Fname.ext

Save as Jobname.db

Save As

SAVE, *Fname, Ext, Dir*

Zápis databázy zo súboru Dir:/Fname.ext

Switch Output to / File

Switch Output to / Output Window

/OUTPUT, *Fname, Ext, Dir, Loc*

Presmerovanie textového výstupu Dir:/Fname.ext

Exit

EXIT, *Slab, Fname, Ext, Dir*

Ukončenie systému ANSYS so zápisom (alebo bez) do súboru Dir:/Fname.ext

ANSYS Utility Menu / Select

Entities

KSEL, *Type, Item, Comp, VMIN, VMAX, VINC, KABS*

Vyselektovanie niektorých kľúčových bodov

KSEL, *Type, Item, Comp, VMIN, VMAX, VINC, KSWP*

Vyselektovanie niektorých línií

ASEL, *Type, Item, Comp, VMIN, VMAX, VINC, KSWP*

Vyselektovanie niektorých plôch

NSEL, *Type, Item, Comp, VMIN, VMAX, VINC, KABS*

Vyselektovanie niektorých uzlov

ESEL, *Type, Item, Comp, VMIN, VMAX, VINC, KABS*

Vyselektovanie niektorých prvkov

NSLE, *Type*

Vyselektovanie uzlov, ktoré obsahujú práve aktívne prvky

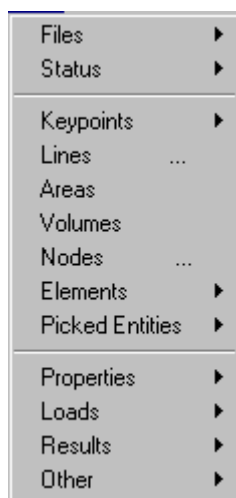
ESLN, *Type, EKEY*

Vyselektovanie prvkov s práve aktívnymi uzlami

Everything

ALLSEL, *LabT, Entity*

Vyselektovanie všetkých prvkov (uzly, prvky, atď.)



ANSYS Utility Menu / List

Keypoints

KLIST, *NP1, NP2, NINC, Lcoord*

Výpis zoznamu kľúčových bodov

Lines

LLIST, *NL1, NL2, NINC*

Výpis zoznamu línií

Areas

ALIST, *NA1, NA2, NINC*

Výpis zoznamu plôch

Nodes

NLIST, *NODE1, NODE2, NINC*

Výpis zoznamu uzlov

Elements

ELIST, *IEL1, IEL2, INC, NNKEY, RKEY*

Výpis zoznamu prvkov

Properties / Element Types

ETLIST, *ITYP1, ITYP2, INC*

Výpis zoznamu typov prvkov

Properties / All Real Constants

Properties / Specified Real Const

RLIST, *NSET1, NSET2, NINC*

Výpis zoznamu reálnych konštánt

Properties / All Materials

MPLIST, *MAT1, MAT2, INC, Lab, TEVL*

Výpis zoznamu materiálových charakteristík

Loads / DOF Constraints

DLIST, *NODE1, NODE2, NINC*

Výpis zoznamu okrajových podmienok v uzle

DKLIST, KPOI

Výpis zoznamu okrajových podmienok v kľúčovom bode

DLIST, LINE

Výpis zoznamu okrajových podmienok na línii

DALIST, AREA

Výpis zoznamu okrajových podmienok na ploche

Loads / Force**FLIST, NODE1, NODE2, NINC**

Výpis zoznamu singulárnych síl v uzle

FKLIST, KPOI, Lab

Výpis zoznamu singulárnych síl v kľúčovom bode

Loads / Surface Loads**SFLIST, NODE, Lab**

Výpis zoznamu spojitých zaťažení na uzol

SFELIST, ELEM, Lab

Výpis zoznamu spojitých zaťažení na prvok

SFLLIST, LINE, Lab

Výpis zoznamu spojitých zaťažení na línii

SFALIST, AREA, Lab

Výpis zoznamu spojitých zaťažení na plochu

Loads / Body Loads**BFLIST, NODE, Lab**

Výpis zoznamu teplotných zaťažení v uzle

BFELIST, ELEM, Lab

Výpis zoznamu teplotných zaťažení na prvok

BFKLIST, KPOI, Lab

Výpis zoznamu teplotných zaťažení v kľúčovom bode

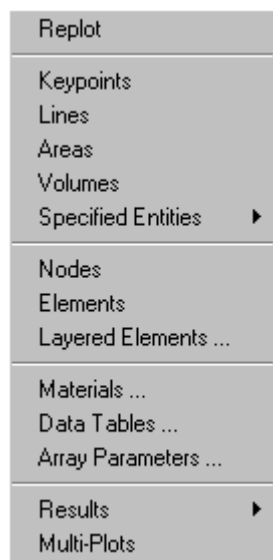
Results

Príkazy sú totožné s príkazmi v postprocesore:

ANSYS Main Menu / General Postproc / List Results

Other / Coupled Sets**CPLIST, NODE1, NODE2, NINC, Nsel**

Výpis zoznamu spoločných posunov a rotácií uzlov



ANSYS Utility Menu / Plot

Keypoints

KPLOT, *NP1*, *NP2*, *NINC*

Vykreslenie kľúčových bodov

Lines

LPLOT, *NLI*, *NL2*, *NINC*

Vykreslenie línií

Areas

APLOT, *NA1*, *NA2*, *NINC*

Vykreslenie plôch

Nodes

NPLOT, *KNUM*

Vykreslenie uzlov

Elements

EPLOT

Vykreslenie prvkov

Results

Príkazy sú totožné s príkazmi v postprocesore:

ANSYS Main Menu / General Postproc / Plot Results



ANSYS Utility Menu / PlotCtrls

Numbering

/PNUM, *Label*, *KEY*

Nastavenie spôsobu vykresľovania objektov (uzly, elementy, atď.)

/NUMBER, *NKEY*

Nastavenie požiadavky číslovania objektov (uzly, elementy, atď.)

Symbols

/PBC, *Item*, *_*, *KEY*

Nastavenie vykresľovania symbolov okrajových podmienok a singulárneho zaťaženia

/PSF, *Item*, *COMP*, *KEY*

Nastavenie vykresľovania symbolov spojitého zaťaženia

/PBF, *Item*, *_*, *KEY*

Nastavenie vykresľovania symbolov teplotného zaťaženia

/PSYMB, *Label*, *KEY*

Nastavenie vykresľovania ďalších symbolov (napr. súradný systém)

Style / Size and Shape

/SHRINK, *RATIO*

Nastavenie vykresľovania prvkov so zmenšením ich veľkosti

/ESHAPE, *SCALE*

Window Controls / Window Options

/PLOPTS, *Label*, *KEY*

Nastavenie spôsobu vykresľovania grafického výstupného okna

/TRIAD, *Lab*

Nastavenie spôsobu vykresľovania značky súradného systému

Redirect Plots / To File

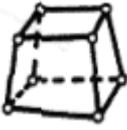
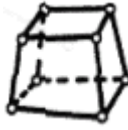
Redirect Plots / To Screen

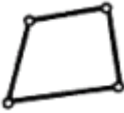
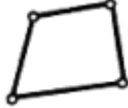
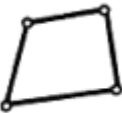
/SHOW, *Fname*, *Ext*, *VECT*, *NCPL*

Presmerovanie grafického výstupu

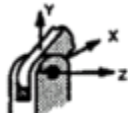
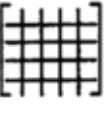
18. KNIŽNICA PRVKOV V SYSTÉME ANSYS

Structural Point	Structural 2-D Line	Structural 2-D Beam		
Structural Mass  MASS21 1-node 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Spar  LINK1 2-nodes 2-D space DOF: UX, UY	Elastic Beam  BEAM3 2-nodes 2-D space DOF: UX, UY, ROTZ	Plastic Beam  BEAM23 2-nodes 2-D space DOF: UX, UY, ROTZ	Offset Tapered Unsymmetric Beam  BEAM54 2-nodes 2-D space DOF: UX, UY, ROTZ
Structural 3-D Line			Structural 3-D Beam	
Spar  LINK8 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Tension-Only Spar  LINK10 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Linear Actuator  LINK11 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Elastic Beam  BEAM4 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Thin Walled Plastic Beam  BEAM24 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ
Offset Tapered Unsymmetric Beam  BEAM44 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Structural Pipe	Elastic Pipe Tee  PIPE17 4-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Curved Pipe (Elbow)  PIPE18 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Plastic Straight Pipe  PIPE20 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ
Immeresed Pipe  PIPE59 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Plastic Curved Pipe  PIPE60 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Structural 2-D Solid	Axisymmetric Harmonic Str. Solid  PLANE25 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Structural Solid  PLANE42 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY
Structural Solid  PLANE82 8-nodes 2-D space DOF: UX, UY	Axisymmetric Harmonic Str. Solid  PLANE83 8-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Structural 3-D Solid	Layered Solid  SOLID46 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Anisotropic Solid  SOLID64 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ
Structural Solid  SOLID45 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ				

Reinforced Solid  SOLID65 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Solid with Rotations  SOLID72 4-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Solid with Rotations  SOLID73 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Tetraedral Solid  SOLID92 10-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Structural Solid  SOLID95 20-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ
Structural 2-D Shell Plastic Axisymmetric Shell with Torsion  SHELL51 2-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ ROTZ	Axisymmetric Harmonic Str. Shell  SHELL61 2-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ ROTZ	Structural 3-D Shell Shear/Twist Panel  SHELL28 4-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Membrane Shell  SHELL41 4-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Plastic Shell  SHELL43 4-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ
Elastic Shell  SHELL63 4-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	16-Layer Structural Shell  SHELL91 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Structural Shell  SOLID93 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	100-Layer Structural Shell  SHELL99 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	
Hyperelastic Solid Hyperelastic Mixed U-P Solid  HYPER56 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Hyperelastic Mixed U-P Solid  HYPER58 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Hyperelastic Mixed U-P Solid  HYPER74 8-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Hyperelastic Solid  HYPER84 8-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Hyperelastic Solid  HYPER86 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ
Visco Solid Viscoelastic Solid  VISCO88 8-nodes 2-D space DOF: UX, UY	Viscoplastic Solid  VISCO106 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Viscoplastic Solid  VISCO107 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Viscoplastic Solid  VISCO108 8-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Thermal Point Thermal Mass  MASS71 1-node 3-D space DOF: TEMP

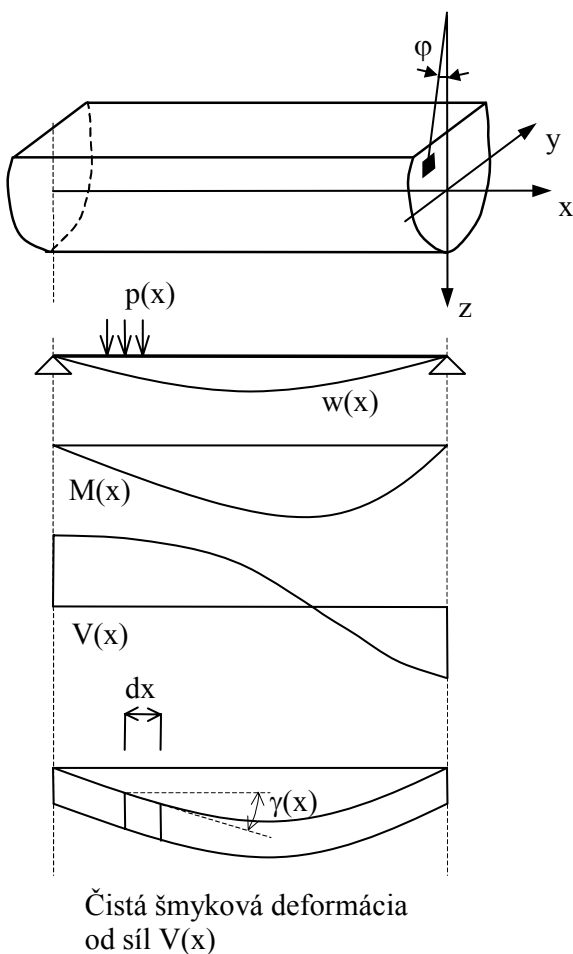
Thermal Line Radiation Link  LINK31 2-nodes 3-D space DOF: TEMP	Conduction Bar  LINK32 2-nodes 2-D space DOF: TEMP	Conduction Bar  LINK33 2-nodes 3-D space DOF: TEMP	Convection Link  LINK34 2-nodes 3-D space DOF: TEMP	Thermal 2-D Solid Triangular Thermal Solid  PLANE35 6-nodes 2-D space DOF: TEMP
Thermal Solid  PLANE55 4-nodes 2-D space DOF: TEMP	Axisymmetric Harmonic Thermal Solid  PLANE75 4-nodes 2-D space DOF: TEMP	Thermal Solid  PLANE77 8-nodes 2-D space DOF: TEMP	Axisymmetric Harmonic Thermal Solid  PLANE78 8-nodes 2-D space DOF: TEMP	Thermal 2-D Solid Thermal Solid  SOLID70 8-nodes 3-D space DOF: TEMP
Tetrahedral Thermal Solid  SOLID87 10-nodes 3-D space DOF: TEMP	Thermal Solid  SOLID90 20-nodes 3-D space DOF: TEMP	Thermal Shell Thermal Shell  SHELL57 4-nodes 3-D space DOF: TEMP	Fluid Thermal-Fluid Flow  FLUID15 6-nodes 2-D space DOF: VX, VY, PRES, TEMP	Acoustic Fluid  FLUID29 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY, PRES
Acoustic Fluid  FLUID30 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, PRES	Dynamic Fluid Coupling  FLUID35 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ	Thermal-Fluid Pipe  FLUID66 2-nodes 3-D space DOF: PRES, TEMP	Contained Fluid  FLUID79 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY	Contained Fluid  FLUID80 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ
Axisymmetric Harmonic Contained Fluid  FLUID81 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY, UZ	Thermal-Electric Thermal-Electric Solid  PLANE67 4-nodes 2-D space DOF: TEMP, VOLT	Thermal-Electric Line  LINK68 2-nodes 3-D space DOF: TEMP, VOLT	Thermal-Electric Solid  PIPE18 8-nodes 3-D space DOF: TEMP, VOLT	Magnetic-Electric Current Source  SOURC36 3-nodes 3-D space DOF: MAG

Magnetic-Electric	Magnetic-Electric	Coupled-field	Coupled-field Solid	Tetrahedral
		Coupled-field Solid		

Solid  PLANE53 8-nodes 2-D space DOF: VOLT, AZ	Solid  SOLID96 8-nodes 3-D space DOF: VOLT, MAG AX, AY, AZ	 SOLID5 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, TEMP, VOLT, MAG	 PLANE13 4-nodes 2-D space DOF: UX, UY, TEMP, VOLT, AZ	Coupled-field Solid  SOLID98 10-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ, TEMP, VOLT, MAG
Contact				
Point to Point  CONTAC12 2-nodes 2-D space DOF: UX, UY	Point to Ground  CONTAC26 3-nodes 2-D space DOF: UX, UY	Point to Surface  CONTAC48 3-nodes 2-D space DOF: UX, UY, TEMP	Point to Surface  SHELL99 5-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ TEMP	Point to Point  CONTAC52 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ
Combinations				
Revolute Joint  COMBIN7 5-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Spring-Damper  COMBIN14 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ, PRES, TEMP	Control  COMBIN37 4-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ, PRES, TEMP	Nonlinear spring  COMBIN39 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ, PRES, TEMP	Combinations  COMBIN40 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ, PRES, TEMP
Matrix		Infinite		
Stiffness, Mass or Dampng Matrix  MATRIX27 2-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ ROTX, ROTY, ROTZ	Superelement  MATRIX50 2-D or 3-D space DOF: Any	Infinite Boundary  INFIN9 2-nodes 2-D space DOF: MAG, TEMP	Infinite Boundary  INFIN47 4-nodes 3-D space DOF: MAG, TEMP	Surface Surface Effect  SURF19 3-nodes 2-D space DOF: UX, UY PRES, TEMP
Surface Effect  SURF22 8-nodes 3-D space DOF: UX, UY, UZ PRES, TEMP				

DODATOK A

Šmykový súčiniteľ κ



Definícia šmykového súčiniteľa κ pre prierez nosníka podľa obrázku.

Nosník za ohybu v zvislej rovine xz , pri započítaní vplyvu práce priečných síl $V(x)$:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M^2}{EI} + \kappa \frac{T^2}{GA} \right) dx$$

Ekvivalencia pomernej energie šmykových síl:

$$\frac{1}{2} \kappa \frac{T^2}{GA} = \frac{1}{2} \iint_A (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dA$$

Grashofova hypotéza:

$$\tau_{xy}(y, z) = \tau_{xz}(z) \frac{y \operatorname{tg} \varphi(z)}{\eta(z)}$$

Hookov zákon:

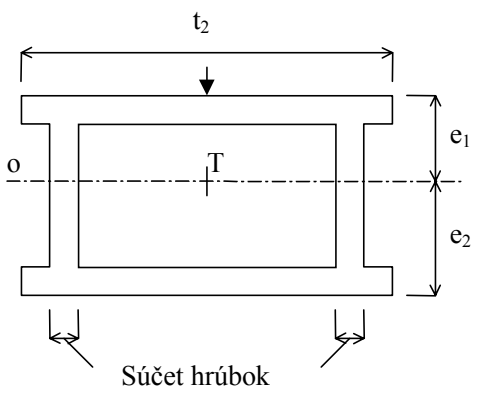
$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

Práca priečnej sily V na dĺžke $\Delta w = \gamma dx$:

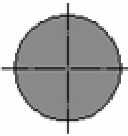
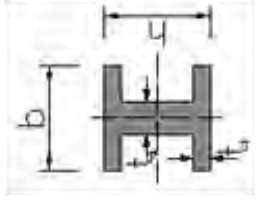
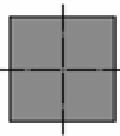
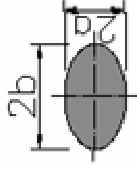
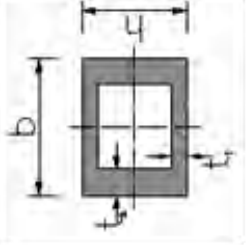
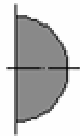
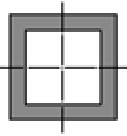
$$\frac{1}{2} V \gamma dx \quad \gamma = \kappa \frac{V}{GA} \quad V = \frac{1}{\kappa} GA \gamma = G \frac{A}{\kappa} \gamma$$

odkiaľ "efektívna plocha" $A' = \frac{A}{\kappa}$

Zjednodušené vzťahy pre výpočet šmykového súčiniteľa κ

Prierez	Súčiniteľ κ
Obdĺžnik 	1,2
Plný kruh 	$32/27 = 1,18$
Mnohouholníky 	$10/9 = 1,11$
Kružnica 	2
Tenkostenné n-uholníky 	
Valcované profily 	2,1 až 2,8
Betónové  profily s plochou A , plocha stojín A_s	$\kappa \approx \frac{A}{A_s} \quad (A' \approx A_s)$
Prierezy  a pod. pri súčte hrúbok zvislých stien t_1 a polomeru zotrvačnosti i k neutrálnej osi o 	$\kappa = I + k \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \frac{4e_2^2}{10 i^2}$ $k = \frac{3(e_2^2 - e_1^2)e_1}{2e_2^3}$

Smykový účtovýb mýfob pŕedloz

	$\kappa = \frac{7+6\nu}{6(1+\nu)}$		$\kappa = \frac{(1.2+7.2m+150m^2+90m^3)+\nu(11+66m+135m^2+90m^3)}{10(1+\nu)(1+3m)^2}$ $+ \frac{30m^2(m+m^2)+5\nu m^2(8m+9m^2)}{10(1+\nu)(1+3m)^2}$ $m = \frac{2b t_f}{t_w h}, \kappa = \frac{b}{h}$
	$\kappa = \frac{12+11\nu}{10(1+\nu)}$		$\kappa = \frac{(1.2+96m+276m^2+192m^3)+\nu(11+88m+248m^2+216m^3)}{10(1+\nu)(1+3m)^2}$ $+ \frac{30m^2(m+m^2)+10\nu m^2(4m+5m^2+m^3)}{10(1+\nu)(1+4m)^2}$ $m = \frac{2b t_f}{t_w h}, \kappa = \frac{b}{h}$
	$\kappa = \frac{(40+37\nu)a^4+(16+10\nu)a^2b^2+b^4}{12(1+\nu)a^4(3a^2+b^2)}$ $0 < a < b$		$\kappa = \frac{(1.2+7.2m+150m^2+90m^3)+\nu(11+66m+135m^2+90m^3)}{10(1+\nu)(1+3m)^2}$ $+ \frac{10m^2((3+\nu)m+3m^2)}{10(1+\nu)(1+3m)^2}$ $m = \frac{2b t_f}{t_w h}, \kappa = \frac{b}{h}$
	$\kappa = \frac{1.305+1.237\nu}{1+\nu}$		
	$\kappa = \frac{48+39\nu}{20(1+\nu)}$		

DODATOK B

Moment tuhosti v krútení

Torzná tuhosť prútov rôznych priereзов J_k ($=J_x$, vektorový index osi prúta x)

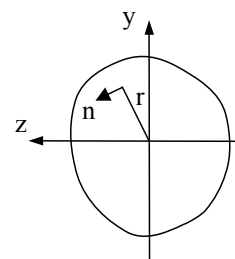
Definícia: $T = GJ_k \vartheta$

ϑ = pomerný uhol skrútenia prúta na jednotku jeho dĺžky.

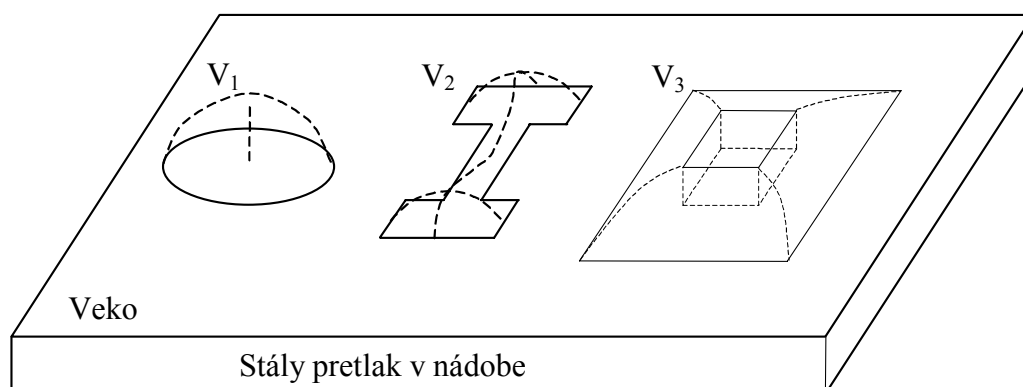
Fyzikálny rozmer: $[Nm] = [Nm^{-2}][m^4][m^{-1}]$

Definícia krútiaceho momentu:

$$T = \iint_{A_x} \tau_{xn} r dA_x = \iint_{A_x} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA_x$$



Kvalitatívna predstava o veľkosti J_k porovnaním objemu vrchlíkov V_1 , V_2 membrány nad dvomi otvormi 1, 2 pri rovnakom pretlaku (Prandtlov vrchlík). J_k je úmerný objemu V .



Pre porovnávací kruhový otvor 1 poznáme presnú hodnotu

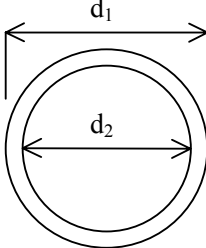
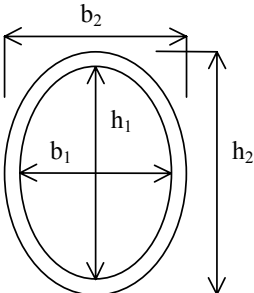
$$J_{k1} = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{2} r^4$$

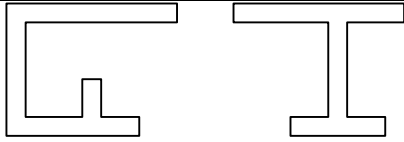
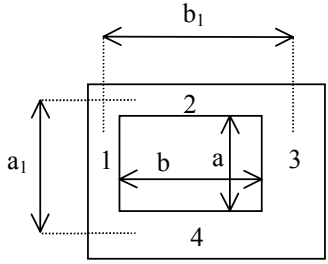
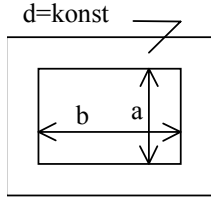
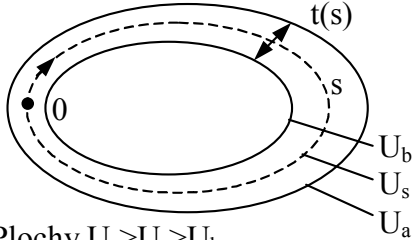
Potom

$$J_{k2} = J_{k1} \frac{V_2}{V_1}$$

Pri prierezoch s otvorom je nutné cez otvor položiť nekonečne ľahký poklop a viesť ho paralelne s vekom. V_3 je objem vzniknutého anuloidného vrchlíku.

Zjednodušené vzťahy pre výpočet torznej tuhosti prútov rôznych prierezov

Obdĺžnik, $h \geq b$, $J_k = \gamma b^3 h$ H/b 1,0 1,1 1,2 1,5 2,0 3,0 5,0 10,0 ∞ γ 0,1404 0,1540 0,1661 0,1957 0,2286 0,2633 0,2808 0,3123 0,3333 Orientačná hodnota pre hrubostenný obdĺžnik s otvorom $J_k \approx J_{k1} - J_{k2}$  J_{k1}  J_{k2} 	
Pravidelný trojuholník so stranou a Pravidelný štvoruholník (štvorec) $\alpha=0,5630$ Pravidelný šesťuholník $\alpha=0,5331$ Pravidelný osemuholník $\alpha=0,5202$ Kruh $\alpha=0,5000$ Kruh r - polomer vpísanej kružnice	$J_k = a^4 \sqrt{3} / 80$ $J_k = \alpha r^2 A$ $J_k = \frac{\pi}{2} r^4 = \alpha r^2 A$ A - plocha prierezu
Medzikružie $d_2 > d_1$ $n = \frac{d_1}{d_2} < 1$ $J_k = \frac{\pi}{32} d_2^4 (1 - n^4)$	
Elipsa $n = h_1 / h_2$; $n = b_1 / b_2$ $J_k = \frac{\pi}{16} \frac{b_2^3 h_2^3}{b_2^2 - h_2^2} (1 - n^4)$ Pre plnú elipsu $n=0$	
Otvorené profily zložené z úzkych obdĺžnikov	

$J_k \cong \sum_i J_{ki}, \quad J_k \approx \frac{I}{3} \sum_i b_i^3 h_i, \quad b_i < h_i$	
Dutý obdĺžnikový prierez s nie príliš veľkými hrúbkami stien d_1, d_2, d_3, d_4 (zásadne sú uzatvorené profily rádovo tuhšie ako rovnaké otvorené v krútení)	
$J_k = \frac{4aba_1b_1[a(d_1+d_3)+b(d_2+d_4)]}{a^2 \frac{(d_1+d_3)^2}{d_1d_3} + b^2 \frac{(d_2+d_4)^2}{d_2d_4}}$	
$J_k = 2d \frac{a^2b^2(a+b)}{a^2+b^2} \quad (>> \frac{I}{3} \sum d^3 s)$	
Uzatvorený profil premennej hrúbky Strednica dĺžky O_s uzatvára plochu U_s. U_a a U_b sa vzťahuje k vonkajšiemu a vnútornému obvodu $J_k = \frac{4U_s^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}$ Pri konštantnej hrúbke t $J_k \approx \frac{2U_s t}{O_s} (U_a + U_b)$	 Plochy $U_a > U_s > U_b$ O_s=obvod

19. LITERATÚRA

- [1] Barkan, D., D.: *Dynamic of Soil and Foundations*, Gosstrojizdat, Moskva, 1948.
- [2] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1037 pp., 1996.
- [3] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: *Numerical Methods in Structural Mechanics*. Telford, London, 1996, 470 pp.
- [4] Clough, R., W., Penzien, J.: *Dynamics of Structures*, Mc Graw-Hill, Inc. 1993.
- [5] Chen, W. F., Han, D. J.: *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag New York Inc., 1988.
- [6] Chopra, A., K.: *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, University of California Berkeley, 2001.
- [7] Hinton, E., Owen, D. R. J.: *Finite Element Programming*. Academic Press, London, 1977.
- [8] Hughes, T. J. R.: *Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [9] Kohnke, P.: *ANSYS, Inc. Theory*, SAS IP Inc. Canonsburg, USA, 2008
- [10] Králik, J., Jendželovský, N., Roško, P., Sokol, M.: *Ateliérová tvorba - Statický výpočet konštrukčných systémov*. Skriptum SvF STU. ES STU Bratislava, 1992, 276 strán .
- [11] Králik a kolektív : *Nové trendy a metódy v navrhovaní konštrukcií. Zatiaženie konštrukcií, aeroelasticita a seizmicita v Eurokódach. Eurokódy 1 a 8*. Bratislava, SvF STU, 2006. ESF 13120110065. 315s.
- [12] Králik, J.: *Safety and Reliability of Nuclear Power Buildings in Slovakia. Earthquake-Impact-Explosion*. Monograph. Ed. STU Bratislava, 2009, 305 pp.
- [13] Králik, J.: *Reliability Analysis of Structures Using Stochastic Finite Element Method*, Monograph. Published by STU Bratislava, 2009, 143pp.
- [14] Madenci, E., Guven, I.: *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*, University of Arizona, Springer, 2006.
- [15] Makovička, D.: *Analysis of the Building Structures Loaded by Dynamic Effect of the Machines*. Appendix ČSN 730032. ÚNM Prague, 1980. (in Czech)
- [16] Nilson, A. H., Bažant, Z., Chang, T. Y., et al: *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete*, ASCE, New York, 1982.

- [17] Oetter,E., Králik,J., Blaško, Kotrasová,K.: *Využitie výpočtovej techniky v statike stavebných konštrukcií pre projektovanie počítačmi*, skriptum VST Košice, 1989. 142strán (42 strán, podiel 30%)
- [18] Richart,F.,E., Woods,R.,D., Hall,J.,R.: *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 1994.
- [19] Stolarski,T.,Nakasone,Y.,Yoshimoto,S.: *Engineering Analysis with ANSYS Software*. Elsevier, Oxford, 2006.
- [20] Wilson,E.L.: *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, Computer and Structures, Berkeley, 2002.
- [21] Wolf,J.,P., Song,Ch.: *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*, Edition John Wiley&Sons Ltd., Chichester, 1996.
- [22] Zienkiewicz,O.C., Taylor,R.L.: *The Finite Element Method. Vol. 1 The Basis, Vol .2 Solid Mechanics, Vol.3 Fluid Dynamics*, First ed. by McGraw-Hill 1967, Fift edit. pud. by Butterworth-Heinemann 2000.
- [23] Žmindák,M., Grajciar,I., Nozdrovický,J.: *Modeling and calculation in FEM. Volume I – Modeling in ANSYS*. VTS ŽU Žilina, 208p., 2005. (in Slovak)

22. ZOZNAM SKRATIEK A SYMBOLOV

Organizations and institutions

ACI	- American Concrete Institute
AFPS	- Association French for Paraseismic Phenomenon
APDL	- ANSYS Parametric Design Language
APVV	- Agentúra na podporu výskumu a vývoja Slovenskej republiky (Research and Development Agency of Slovak Republic)
ASCE	- American Society of Civil Engineers
ASME	- American Society of Mechanical Engineers
AUC	- ANSYS User Club
CSNI	- Committee on the Safety of Nuclear Installations
EBO	- Elektrárne Bohunice (Bohunice Power Station)
ENV	- European Standard Volume
DIN	- Germany Standard
IAEA	- International Atomic Energy Agency
ISO	- International Organisation for Standardization
JCSS	- Joint Committee of Structural Safety
NEA	- Nuclear Energy Agency
NPP	- Nuclear Power Plant
NTC	- National Technology Corporation
OECD	- Organisation for Economic Co-operation and Development
SASI	- Computer Company
SAV	- Slovenská akadémia vied (Slovak Academy of Sciences)
STN	- Slovenská technická norma (Slovak Technical Standard)
US NRC	- US Nuclear Commission
VEGA	- Vedecká grantová agentúra MŠ SR a SAV (Scientific Grant Agency)
VÚJE	- Výskumný ústav jadrových elektrární (Nuclear Power Plant Research Institute Trnava)
VÚEZ	- Výskumný ústav energetických závodov (Nuclear Power Company Research Institute Levice)

Structures and technologies components

CRAY	- Computer type
CTMT	- Containment
EWST	- Emergency Water Storage Tank
HW	- Hardware
IGES	- Type of Graphic Format
NPP	- Nuclear Power Plants
HZ	- Hermetic zone
PC	- Personal Computer
PG	- Parogenerátor (Steam generator)
WWER	- Russian type of reactor (Voronez)

Calculation programs, methods and methodologies

AFOSM	- Advanced First-Order Second Moment
ALM	- Arc Length Method
ANSYS	- Analyse System
AS	- Adaptive Sampling
BBM	- Box-Behnken Matrix Sampling
BDBA	- Beyond Design Basic Accident
CCD	- Central Composite Design Sampling
CDF	- Cumulative Distribution Function
CQC	- Complete Quadratic Combination
COV	- Coefficient of Variation
DBA	- Design Basic Accident
DS	- Direct Sampling
FEA	- Finite Element Analysis
FEM	- Finite Element Method
FORM	- First - Order Reliability Method
FReET	- Feasible Reliability Engineering Tool
GCS	- Global Coordinate System
MathCAD	- Mathematic Program with Graphical (CAD) system
MATLAB	- Matrix Laboratory (Mathematic Program)
MC	- Monte Carlo
IS	- Importance Sampling

LCS	- Local Coordinate System
LHS	- Latin Hypercube Sampling
LOCA	- Loss of Coolant Accident
MVFOSM	- Method of First-Order Second-Moment
PDF	- Probability Density Function
PMF	- Probability Mass Function
PSA	- Probabilistic Safety Analysis
RSM	- Response Surface Method
SLS	- Serviceability Limit States
SBRA	- Simulation-Based Reliability Assessment Method
SRSS	- Square Root of Sum of Squares
SFEM	- Stochastic Finite Element Method
SORM	- Second - Order Reliability Method
SSI	- Soil-Structure Interaction
ULS	- Ultimate limit states

Loads and load combination

Latin upper case letters

A_E	- Earthquake load
A_{Ed}	- Design value of the Earthquake load
A_{Ek}	- Characteristic Value of the Earthquake load
A_{exp}	- External explosion
A_{apc}	- Airplane crash
C_t	- Climatic load (temperature)
C_e	- Climatic load (temperature)
D	- Dead Load
E	- Effect of action
E_o	- Earthquake loads equivalent to SL-1
E_{ss}	- Safe shutdown earthquake equivalent to SL-2
E_{stat}	- Static Young modulus
E_d	- Design value of effect of actions
E_{dyn}	- Dynamic Young modulus
E_k	- Characteristic value of effect of actions
$E_X[.]$	- Expected Value of the Function [.]

$F_X(\{X\})$	- Cumulative distribution function of multivariable $\{X\}$
$f_X(\{X\})$	- Joint probability density function of multivariable $\{X\}$
$g(\{X\})$	- Failure function
G	- Loads resulting from relief valve or other high energy device actuation
H_a	- Loads due to containment flooding
L	- Live load
L_a	- Live load during accident
P_f	- Probability of failure
P_t	- Test pressure
P_o	- Hydrostatic pressure (water tank)
P_a	- Accident pressure (LOCA, SME)
Q	- Variable load
R	- Resistance
R_d	- Design value of resistance
R_k	- Characteristic value of resistance
R_o	- Reaction of component during accident
R_a	- Reaction of component during accident
S	- Snow load
$SL1$	- Loads generated by operating basis earthquake (OBE = return period 100 years)
$SL2$	- Loads generated by safe shutdown earthquake (SSE = return period 10000 years)
T	- Temperature and imposed displacement loads
T_o	- Operating temperature
T_a	- Accident temperature (LOCA)
T_t	- Test temperature
W	- Wind loads (typical)
W_t	- Tornado loads (extrem wind loads)
X	- Simple variable
Y	- Missile impact

Action effects and resistance - forces, stress and strain

Matrices

$[B]$	- Strain shape matrix
-------	-----------------------

$[C]$	- Viscous damping matrix
$[D]$	- Material stiffness matrix
$[D_{cr}]$	- Material stiffness matrix of cracking concrete
$[\mathcal{O}]$	- Derived operator matrix
$[K]$	- Element stiffness matrix
$[I_i]$	- Matrix with ones in the “ i ” directional degrees-of-freedom
$[M]$	- Mass matrix
$[N]$	- Element shape matrix
$[n]$	- Outward unit normal matrix
$[T]$	- Transformation matrix

Vectors

$\{F\}$	- Vector of the external forces
$\{b\}$	- Body force vector
$\{p\}$	- Surface force vector
$\{r\}$	- Element vector of the residual parameters
$\{u\}$	- Displacement vector
$\{\dot{u}\}$	- Velocity vector
$\{\ddot{u}\}$	- Acceleration vector
$\{\varepsilon\}$	- Strain vector
$\{\varepsilon_o\}$	- Initial strain vector
$\{\varepsilon_{cr}\}$	- Cracking Strain of Concrete
$\{\sigma\}$	- Stress vector
$\{\sigma_o\}$	- Initial Stress Vector
$\{\sigma_{cr}\}$	- Cracking Stress of Concrete

Scalars

Latin upper case letters

A	- Section area
A_i	- Participation factor depends on the spectrum acceleration response for mode i

A_r	- Redused Section Area
D	- Diameter
$F_{r.k}$	- Characteristic frequency
G_f	- Failure Energies
$I_1 (J_2)$	- First Invariant of the Stress Tensor (Second Invariant of the Stress Deviator)
L	- Length
$M_i(.)$	- Mapping Function
$M_E (M_R)$	- Bending Moment of Action (Resistance)
$N_i(.)$	- Shape Function
$N_E(N_R)$	- Normal Force of Action (Resistance)
$V_E(V_R)$	- Shear Force of Action (Resistance)
V_X	- Coefficient of variation (COV)

Latin lower case letters

a	- Concrete cover
a_{var}	- Variable parameter of the Concrete cover
$a_{E.var}$	- Variable parameter of the Earthquake load
b_x, b_y, b_z	- Volume forces in direction x, y, z
c_o, c_i	- Constant and linear members
$d_E (d_R)$	- Interstorey Horizontal Displacement of Action (Resistance)
$d_{Ik} (d_{2k})$	- Characteristic Values of the thickness
e	- Excentricity
e_{var}	- Variable parameter of the Young modulus
f	- Frequency
$f_{ay} (f_{sy})$	- Yield stress of steel (reinforced)
$f_{au} (f_{sy})$	- Ultimate strength of steel (reinforcement)
f_c	- Compressive strength of concrete
f_{ck}	- Characteristik compressive cylinder strength of concrete at 28 days
$f_{r.var}$	- Variable Factor of Frequency
f_c^{ef}	- Effective Compression Strength of Concrete
f_t^{ef}	- Effective Tensil Strength of Concrete
g_{var}	- Variable parameters of the dead load
h_k	- Characteristic Height

h_{var}	- Variable Factor of Height
i_{corr}	- Corrosion Current Density
k_D	- Ductility coefficient
$k_{z,k}$	- Characteristic value of soil stiffness
$k_{xx,k} (k_{yy,k})$	- Characteristic value of soil stiffness for rotation about axis X (i.g. Y)
$k_{z,var}$	- Variable factor of soil stiffness in z-direction
$k_{xx,var} (k_{yy,var})$	- Variable factor of soil stiffness for rotation about axis X (i.g. Y)
$m_x(.), m_y(.)$	- Intensity of Bending Moments
$m_{xy}(.)$	- Intensity of the Twisting Moments
$n_x(.), n_y(.)$	- Intensity of Shear Forces
n_x, n_y, n_z	- Unit normal components in direction X, Y, Z
p_x, p_y, p_z	- Surface forces in direction X, Y, Z
$t_x(.), t_y(.), t_{xy}(.)$	- Intensity of Normal Forces
q_{var}	- Variable Factor of Variable Load
u, v, w	- Displacement components in direction X, Y, Z

Greek upper case letters

$\Phi(.)$	- Cumulative Distribution Function of a Normal Distribution
Φ	- Displacement Phase Shift
Γ_i	- Participation factor for mode i
ψ	- Force Phase Shift
Ω	- Circular Frequency ($2\pi f$),

Greek lower case letters

β	- Safety index
$\phi(.)$	- Density function of a standard normal variable
ε_x	- Strain component in direction X
$\varepsilon_{tu}(\varepsilon_{cu})$	- Limit strain in tension (compression)
ε^{eq}	- Equivalent Stress of Concrete
γ_I	- Importance factor
γ_{xy}	- Strain component in plane XY
$\gamma_E (\gamma_R)$	- Partial factor of action effect (resistance)

λ_X	- Parameter of lognormal distribution
μ_X	- Mean value of simple X
$\psi_{2,Q}$	- Combination factor according to ENV 1990
σ_X	- Standard deviation X
σ_x	- Normal stress component in direction X
σ_c^{ef}	- Effective Compression Stress of Concrete
σ_t^{ef}	- Effective Tensile Stress of Concrete
ρ_{XY}	- Correlation Coefficient
τ_{xy}	- Shear stress component in plane xy
θ_E	- Model uncertainties of Action Effect
$\theta_{E,var}$	- Variable Factor of Model Uncertainties of Action Effect
θ_R	- Model Uncertainties of Resistance
$\theta_{R,var}$	- Variable Factor of Model Uncertainties of Resistance
ξ_X	- Parameter of Lognormal Distribution
∂	- Operator of Derivative

Other

[.]	- Matrix
{.}	- Vector